



UNIVERSITE DE CAEN/BASSE-NORMANDIE

U.F.R. des SCIENCES

ECOLE DOCTORALE

"STRUCTURE, INFORMATION, MATIERE ET MATERIAUX"

THESE

présentée par

Mr Julien CHAUCHAT

le 25 juillet 2007

en vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE CAEN

Spécialité : Mécanique des milieux fluides

(Arrêté du 7 août 2006)

**Contribution à la modélisation diphasique du transport
sédimentaire en milieux côtiers et estuariens**

JURY :

M. Olivier Thual	Professeur des Universités à l'INP Toulouse	Rapporteur
M. Olivier Simonin	Professeur des Universités à l'INP Toulouse	Rapporteur
M. Philippe Sargent	Directeur scientifique du CETMEF (HDR)	Examineur
M. Sylvain Guillou	Maître de Conférence à l'Université de Caen (HDR)	Co-directeur de thèse
M. Kim Dan Nguyen	Professeur à l'Université de Caen	Directeur de thèse

A ma femme, Aurore
Et à mon fils, Quentin

Remerciements

Je remercie le CETMEF (contrat n° 05-510006-000-228-6034) et la Commission Européenne (contrat n° ERB IC CT960111) pour le financement et l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à ce travail.

La réalisation de cette thèse n'a pas été un long fleuve tranquille, il m'aura fallu quatre ans et une interruption de quelques mois où j'ai troqué le rôle d'étudiant-chercheur pour celui d'enseignant. Ces années de thèse furent placées sous le signe de la ténacité. Elles n'en furent pas moins intenses et riches sur le plan personnel que ce soit par mon mariage avec Aurore ou la naissance de Quentin. Vous m'avez donné l'énergie pour aller au bout de l'aventure, je vous devais bien cela après tous les efforts consentis, je vous dois beaucoup à tous les deux ...

Je remercie, bien sûr, mes encadrants de thèse M. Kim Dan Nguyen, Professeur à l'Université de Caen et M. Sylvain Guillou, Maître de conférence à l'Université de Caen. Et je tiens à remercier particulièrement M. Sylvain Guillou pour son investissement sans faille dans ce travail. C'est avec une grande pédagogie et beaucoup de patience qu'il m'a transmis sa passion pour la modélisation numérique des écoulements côtiers. Merci Sylvain!

Je tiens également à remercier sincèrement M. Olivier Thual et M. Olivier Simonin, Professeurs à l'INP de Toulouse, qui m'ont fait l'honneur d'accepter de rapporter ma thèse, la corrigeant en détail pour rendre l'ensemble plus pertinent et cohérent.

J'exprime ma profonde gratitude envers M. Philippe Sergent, Directeur scientifique du CETMEF, pour sa présence en tant que membre du jury et aussi pour le soutien financier apporté par le CETMEF, sans lequel ce travail n'aurait pu voir le jour.

Un grand merci à toute l'équipe du M2C et en particulier à M. Patrick Lesueur, Directeur du laboratoire, pour m'avoir accueilli au sein de son unité. Merci également à M. Jean-Claude Brun-Cottan, Chargé de Recherches au CNRS, pour m'avoir fait partager avec enthousiasme sa grande expérience de la physique du transport sédimentaire ; à M. Damien Callaud et M. Dominique Mouazé, Maîtres de Conférence à l'Université de Caen, pour m'avoir fait découvrir l'approche expérimentale durant ces quelques jours de manipulation sur les canaux à houle ; à M. Robinson Hordoir, Doctorant à l'Université de Caen, pour avoir partagé le même bureau, si IDL et l'IBM SP5 du CRIHAN n'ont plus de secret pour moi, c'est un peu grâce à toi.

Merci également à M. Damien Pham Van Bang, Ingénieur du CETMEF, pour le soutien renouvelé du CETMEF après ma thèse et pour notre collaboration en cours qui, j'en suis sûr, sera fructueuse.

Merci à toute l'équipe du SAIC en particulier Mme Michèle Jeanne, Responsable de la Direction de la Recherche, et Mme Isabelle Jamme, Chargée des Relations Industrielles, pour votre investissement personnel dans le montage des dossiers de financement et leur concrétisation.

Je remercie bien évidemment ma famille, mes beaux-parents, spécialement Marie-France pour les heures passées à corriger mes fautes d'orthographe et enfin mes parents qui ont su me laisser suivre mon chemin.

Avant-propos

Les zones estuariennes et côtières figurent parmi les lieux les plus dynamiques de la planète.

Selon la Délégation à l'Aménagement du Territoire et à l'Action Régionale (DATAR, 2006), elles concentrent près des deux tiers de la population mondiale, leur niveau d'occupation est cinq fois plus élevé que la densité moyenne des terres habitées et elles comptent huit des dix plus grandes agglomérations du globe. D'ici trente ans, on estime que les trois quarts de l'humanité vivront dans des zones proches du rivage.

Ces quelques chiffres suffisent à montrer la place centrale qu'occupe aujourd'hui l'espace littoral au sein des activités humaines comme lieu d'échange, de production, d'urbanité et d'innovation. Ce vaste mouvement de "maritimisation" concerne au premier chef les grands ensembles économiques mondiaux (côtes est et ouest des États-Unis, Asie de l'Est, littoral Manche-Mer du Nord ouest-européen, ensemble méditerranéen).

C'est pourquoi, partout dans le monde, les grandes nations maritimes sont engagées dans des politiques à long terme d'aménagement et de mise en valeur de leurs espaces littoraux. Il s'agit à la fois de préparer l'accueil de populations nouvelles, de renouveler et de moderniser les activités, et de préserver l'usage d'un espace de plus en plus fragile et convoité.

De plus l'accélération du réchauffement climatique devrait avoir des répercussions sur l'évolution de cet espace dans les prochaines décennies. Ainsi, une élévation du niveau moyen de la mer, de l'ordre de 40 cm d'ici à 2100 est attendue, et elle sera vraisemblablement accompagnée de tempêtes plus fortes et plus fréquentes.

Le développement des zones côtières est désormais étroitement dépendant d'une intégration des problématiques environnementales et de leur bonne gestion. La perturbation anthropique de ces milieux, qui comprend les pollutions chimiques, bactériologiques et thermiques, et les effets liés à des apports de macrodéchets, de matières sédimentaires ou l'introduction d'espèces allochtones, mettent en péril un équilibre fragile.

Table des matières

Remerciements	1
Avant-propos	3
Introduction	9
I Le transport sédimentaire en milieux côtiers : processus et modélisation	11
I.1 Processus affectant le devenir des sédiments naturels	11
I.1.1 Les sédiments, définitions et classification	11
I.1.2 Les différents modes de transport des sédiments	13
I.1.3 Les processus mis en jeu dans le transport sédimentaire	14
I.2 Etat de l'art de la modélisation numérique classique du transport sédimentaire	16
I.2.1 Un bref historique	16
I.2.2 Modélisation de la suspension	18
I.2.3 Les flux d'échanges entre le fond sédimentaire et la suspension . . .	21
I.2.4 Modélisation du fond sédimentaire	22
I.2.5 Vers une théorie unifiée du transport sédimentaire	24
I.3 Etat de l'art de la modélisation numérique diphasique du transport sédi- mentaire	25
I.3.1 Description mathématique de la modélisation diphasique	25
I.3.2 Revue bibliographique sur la modélisation diphasique du transport sédimentaire	26
I.3.3 Le modèle diphasique 2D vertical à surface libre initial	30
I.4 Objectifs de la thèse	38
II Modélisation diphasique des écoulements fluide-particule	39
II.1 Equations fondamentales	39
II.1.1 Equations de conservation locale instantanée	40
II.1.2 Résultats préliminaires	41
II.1.3 Obtention des équations moyennes	43
II.2 Loi de transfert	47
II.2.1 Modélisation de la force de portance	47
II.2.2 Modélisation de la force de traînée	48
II.2.3 Modélisation des effets de dispersion des particules	55

II.3	Modélisation de la turbulence pour la phase solide	57
II.3.1	Classification des écoulements gaz-solide	57
II.3.2	La théorie cinétique des écoulements granulaires	60
II.3.3	Modélisation des fluctuations de vitesse fluide-particule	69
II.3.4	Bilan sur les fermetures de la turbulence pour le modèle diphasique	74
II.4	Conclusion	83
III	Validation du modèle diphasique de transport sédimentaire	85
III.1	Ecoulement turbulent sur une dune sous-marine	85
III.1.1	Dispositif expérimental	85
III.1.2	Résultats et discussion	88
III.1.3	Conclusions	95
III.2	Etude de la sédimentation en eau calme	96
III.2.1	Cas d'une suspension de billes de polystyrène	97
III.2.2	Cas d'une suspension de vase réelle	104
III.2.3	Conclusion	109
III.3	Simulation de la dispersion de particules en écoulement dilué pleinement turbulent	110
III.3.1	Présentation	110
III.3.2	Résultats et discussion	111
III.3.3	Conclusion	123
III.4	Application au transport en suspension d'un matériel cohésif	124
III.4.1	Configuration expérimentale	124
III.4.2	Adaptation au cas du canal hippodrome	125
III.4.3	Simulation hydro-sédimentaire	131
III.5	Synthèse des résultats	139
IV	Application à l'estuaire de la Seine : une tentative de modélisation	141
IV.1	Rappels et compléments sur les processus hydrosédimentaires en estuaire .	141
IV.2	L'estuaire de la Seine	144
IV.2.1	Situation	144
IV.2.2	Caractérisation hydrosédimentaire de l'estuaire de la Seine	144
IV.3	Adaptation du modèle à l'estuaire de la Seine	145
IV.3.1	Intégration sur la largeur des équations	145
IV.3.2	Conditions de simulation	153
IV.4	Résultats et discussion	155
IV.5	Conclusion	162
	Conclusion et perspectives	163
	Bibliographie	167
	Table des figures	179

A	Notations	183
A.1	Symboles romains	183
A.2	Symboles grecs	185
B	Modèle de floculation basé sur le diamètre équivalent	189
C	Intégration sur la largeur des équations du modèle diphasique	191
C.1	Intégration de l'équation de conservation de la masse	192
C.2	Intégration de l'équation de conservation de la quantité de mouvement . .	193
C.2.1	Etablissement de la condition de surface libre	201
C.3	Conditions aux limites	203
D	Détails sur l'algorithme de résolution	205
D.1	Méthodes numériques	205
D.1.1	Changement de coordonnées $(x, z) \rightarrow (x^*, \sigma)$	205
D.1.2	Conditions aux limites	206
D.1.3	Algorithme de projection	208
D.1.4	Discretisation temporelle et spatiale	209
D.1.5	Techniques de résolution	210
D.2	Organigramme du code	211

Introduction

A l'interface continent-océan, les milieux estuariens et côtiers constituent l'aboutissement des déchets de la plupart des activités anthropiques. La présence d'une part de ce "goulot d'étranglement" des apports de contaminants vers la mer et l'existence d'autre part de caractéristiques hydro-sédimentologiques et biologiques de stockage des contaminants, rendent ce système particulièrement vulnérable. Au vu des enjeux que suscitent les zones côtières et estuariennes il est nécessaire de posséder des outils fiables d'aide à la décision. La complexité de ce milieu et des processus qui s'y produisent rendent le développement d'outils prédictifs extrêmement délicat.

L'approche classiquement utilisée pour modéliser le transport sédimentaire en milieux côtiers et estuariens consiste à traiter séparément la suspension diluée et le fond sédimentaire. Au sein de la suspension, la concentration en particules sédimentaires est faible et les interactions entre particules sont faibles. L'hypothèse du scalaire passif est faite et une équation de type advection-diffusion est résolue pour la concentration en particules sédimentaires. Les phénomènes de sédimentation et de dispersion turbulente sont alors paramétrisés par des formules empiriques. Le fond sédimentaire est le siège des phénomènes de tassement et de consolidation, les interactions entre particules sont dominantes et les théories de la mécanique des sols sont généralement employées pour modéliser le comportement du sédiment. La décomposition en sous-domaines introduit plusieurs difficultés, la première est la définition de la transition entre le fond et la suspension et la seconde correspond à la modélisation des flux de masse entre ces sous-domaines. Cette approche est largement basée sur des considérations empiriques ce qui réduit considérablement leur caractère prédictif. L'approche des écoulements diphasiques fournit un cadre théorique pour représenter l'ensemble des processus hydrosédimentaires de manière continue. Le domaine étudié est considéré dans son ensemble et les échanges entre le fond et la suspension n'ont pas à être prescrits. Cette approche doit permettre une description plus satisfaisante d'un point de vue théorique et physique des processus hydrosédimentaires et ainsi de réduire le degré d'empirisme dans les modèles numériques de transport sédimentaire que ce soit par leur application directe ou dans le développement de paramétrisation pour les modèles classiques.

Cette thèse fait suite aux travaux de *Barbry (2000)*. Un modèle bidimensionnel vertical basé sur la résolution des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement pour chaque phase avait été développé et appliqué à un certain nombre de cas-tests. Les résultats, bien qu'encourageants, ne permettaient pas de valider complète-

ment l'approche pour le transport de sédiments non-cohésifs tant du point de vue de la sédimentation que du point de vue de la turbulence. Dans le travail présent nous tentons de combler ces lacunes, autant techniques que théoriques. Pour ce faire, un travail d'amélioration du code a été réalisé, notamment par l'adaptation d'un modèle de turbulence pour les écoulements à deux phases fluide-solide et la validation par comparaison avec des données expérimentales.

Le document est organisé en quatre chapitres. Le premier chapitre est consacré à la description des processus physiques influençant le transport sédimentaire en estuaires et en zones côtières, et à leur modélisation. Dans le second chapitre nous présentons les équations fondamentales du modèle diphasique, la procédure permettant de les obtenir, les aspects fondamentaux pour la modélisation de la turbulence dans les écoulements diphasiques fluide-solide et les effets de dispersion des particules au sein d'un écoulement turbulent. Le troisième chapitre est dédié à l'application du modèle à des expériences de laboratoire. Ainsi, l'étude de l'écoulement au-dessus d'une dune sous-marine permet de voir autant les problèmes de surface libre que ceux de modélisation de la turbulence. Celui de la sédimentation en eau calme montre les capacités et limites du modèle pour la simulation de la colonne de mélange eau-sédiments dans son intégralité. Enfin, le transport de particule en régime turbulent fait le point sur le poids des modèles pour ce type d'écoulement. Le quatrième et dernier chapitre présente une application à l'estuaire de la Seine. Un rappel sur les processus hydrosédimentaires spécifiques aux milieux estuariens y est fait. Il est suivi par une présentation de l'adaptation à l'estuaire (intégration sur la largeur des équations) et des résultats de simulations.

Chapitre I

Le transport sédimentaire en milieux côtiers : processus et modélisation

Ce premier chapitre est consacré à la description des processus physiques influençant le transport sédimentaire et à leur modélisation. Tout d'abord, nous rappelons quelques définitions concernant les sédiments et leurs modes de transport, les différents processus influençant le transport sédimentaire en milieux côtiers et estuariens. Un état de l'art de la modélisation numérique classique du transport sédimentaire est ensuite exposé. Puis, nous présentons une description de l'approche diphase du transport sédimentaire suivie d'une revue succincte des différents modèles présentés dans la littérature. Enfin nous décrivons plus précisément le modèle de [Barbry \(2000\)](#) qui sert de point de départ à ce travail.

I.1 Processus affectant le devenir des sédiments naturels en milieux côtiers et estuariens

I.1.1 Les sédiments, définitions et classification

Les sédiments sont issus de l'altération des formations continentales superficielles et de l'activité biologique *in situ*, etc. L'altération constitue l'ensemble des mécanismes qui libèrent les particules des roches et soustraient les éléments dissous à la surface terrestre, avant qu'interviennent les processus d'érosion, puis de transport et de dépôt. Les sédiments sont de nature très variée selon les roches dont ils dérivent et sont dominés par des silicates, surtout le quartz pour les fractions grossières, et les minéraux argileux et les carbonates d'origine biogénique.

Le spectre granulométrique est très étendu, depuis les fines poussières jusqu'aux gigantesques blocs, et les sédiments ont des formes très variées : ils sont curviformes, allongés, aplatis ou en feuillets mais rarement sphériques. Ces formes compliquent beaucoup la mesure de la taille des particules et introduisent des incertitudes.

L'analyse des tailles fait appel à une échelle partagée en classe granulométrique, dont la progression est géométrique par commodité historique. La progression la plus utilisée

est celle de [Wentworth \(1922\)](#), pour laquelle chaque classe principale correspond à un diamètre du double ou de la moitié de la classe voisine, la classe de base correspondant à 1 mm (Cf. tableau I.1).

Noms Français	Noms Anglais	Taille (mm)	
Blocs	Boulders	≥ 256	Sédiments grossiers
Gros cailloux	Cobbles	64 - 256	
Graviers	Gravels	32 - 64	
Petits cailloux	Pebbles	4 - 32	
Granules	Granules	2 - 4	
Sable	Sable très grossier	Very Coarse Sand	Sédiments fins
	Sable grossier	Coarse sand	
	Sable moyen	Medium sand	
	Sable fin	Fine sand	
	Sable très fin	Very fine sand	
Silt	Silt grossier	Coarse Silt	
	Silt moyen	Medium silt	
	Silt fin	Fine silt	
	Silt très fin	Very fine silt	
Argile	Clay	0,0001 - 0,00390625	
Colloïde	Colloid	$< 0,0001$	

TAB. I.1 – Classification de Wentworth (1922)

En milieux estuariens et côtiers les sédiments ont des tailles inférieures à quelques millimètres. On y retrouve les sables, les silts, les argiles et les colloïdes.

Les **sables** sont constitués de petites particules provenant de la désagrégation d'autres roches, dont la dimension est comprise entre 0,063 et 2 mm. Ils sont classés selon leur granulométrie. Ils sont souvent, du fait de l'érosion, le produit de la décomposition du granit et des roches carbonatées ainsi que des organismes à squelette calcaire ou siliceux.

Les **silts** sont des particules très fines, de diamètre compris entre 4 – 63 μm , obtenues par l'effritement mécanique des roches sur le fond, et plus particulièrement sous l'action des courants pour les silts d'origine fluviale. Ce sont des particules suffisamment fines pour être transportées sur de longues distances par les courants.

Les **argiles** sont composées, par des aluminosilicates hydratés, qui présentent une structure feuilletée ou fibreuse qui explique leur plasticité. On les classe en trois familles :

- la kaolinite
- la montmorillonite, également connue sous l'appellation de terre de Sommière ;
- l'illite, qui est la plus répandue.

À noter que ces minéraux ne se rencontrent pas isolément dans la nature mais dans des roches composées d'un mélange de minéraux typiques des argiles et d'autres minéraux ou matériaux associés (sable, oxyde de fer, calcaire, débris végétaux). L'interstice entre

les feuillets contient de l'eau ainsi que des ions. Il en résulte des variations de distance entre les feuillets, et donc des variations dimensionnelles macroscopiques de l'argile quand elle s'hydrate (dilatation) ou s'assèche (contraction) et donc une grande variabilité des propriétés rhéologiques.

Les **colloïdes** sont des éléments d'origine minérale ou organique de diamètre inférieur à 0,1 micron. Ils jouent un rôle important dans les processus de cohésion et de floculation.

Les sédiments fins sont caractérisés par une taille arbitraire inférieure à 62,5 μm , ce sont les sables très fins, les silts, les argiles et les colloïdes. Ils sont facilement transportables et sont à l'origine de l'envasement des estuaires et des zones côtières adjacentes. Le comportement des sédiments ne dépend pas uniquement de leur granulométrie (Tab. I.1) mais aussi de leur composition et notamment de leur teneur en argile et en matières organiques. C'est ainsi qu'on différencie les sédiments non-cohésifs des sédiments cohésifs. Les particules constitutives des **sédiments non-cohésifs** sont indépendantes les unes des autres et conservent leur individualité dans leur déplacement, elles n'ont pas tendance à s'agglomérer. Elles constituent les sables. Les **sédiments cohésifs** résultent principalement de la présence d'argiles et/ou de matières organiques. Les grains tendent à se lier entre eux et à former des agrégats ou floes, la taille effective des floes change continuellement sous l'effet des propriétés physicochimiques du milieu (i.e. salinité) et de l'énergie turbulente de l'écoulement ([Verney, 2006](#)). Leur densité varie en fonction de leur teneur en matières organiques, en eau interstitielle ou encore selon leur composition minéralogique. Ce sont les vases.

I.1.2 Les différents modes de transport des sédiments

Il existe trois modes de transport des particules : le roulement ou charriage, la saltation et la suspension. Ces trois modes peuvent être simultanés et les particules concernées par chaque mode dépendent des conditions d'écoulement (i.e. contrainte de cisaillement sur le fond).

Le transport par roulement ou charriage concerne les grains de la couche superficielle des sédiments non-cohésifs qui roulent sur le fond dans le sens de l'écoulement jusqu'à trouver une nouvelle position d'équilibre. Ce mode de transport se produit essentiellement lorsque la contrainte de frottement est proche de la contrainte critique de mouvement.

Le transport par saltation apparaît lorsque le seuil de mouvement est dépassé. L'impulsion fournie par le fluide fait sauter les particules au-dessus du fond suivant une trajectoire balistique. La hauteur maximale atteinte par les grains est de l'ordre de grandeur du diamètre de celle-ci.

Le transport en suspension (ou suspended load) se produit lorsque l'écoulement est suffisamment fort pour maintenir en suspension les particules sans que celles-ci ne se redéposent. Les particules concernées par ce mode de transport sont les sables, les silts et les argiles. La taille et le poids des particules transportées sont en relation directe avec l'intensité de l'écoulement.

D'après [Bagnold \(1973\)](#) la distinction principale se fait entre le transport en suspension et le transport par charriage sur le fond (bed load) comprenant le roulement et la saltation. Dans le cas du transport par roulement et par saltation, l'impulsion fournie par le fluide est sur l'horizontale contrairement au transport en suspension.

Les sédiments non-cohésifs peuvent être transportés par ces trois modes, charriage sur le fond, saltation et transport en suspension. Par contre, les sédiments cohésifs sont principalement transportés en suspension (suspended load) et leur érodabilité varie en fonction de l'état de consolidation des dépôts de vase sur le fond.

I.1.3 Les processus mis en jeu dans le transport sédimentaire

Le comportement des sédiments dans les zones côtières et estuariennes est influencé par de nombreux phénomènes. Les particules chutent, sédimentent et se déposent sur le fond pour former le sédiment. Dans le sédiment se produisent les processus de tassement et de consolidation. Lorsque l'agitation engendrée par les courants et les vagues est suffisante, les sédiments peuvent être remis en suspension ou érodés puis transportés dans l'eau. Au cours de ce transport les sédiments cohésifs peuvent flocculer pour former des agrégats, modifiant ainsi leur chute. [Parker \(1986\)](#) puis [Mehta et al. \(1989\)](#) ont proposé un modèle conceptuel de la dynamique sédimentaire estuarienne reliant les processus de dépôt - érosion - transport aux états spécifiques des vases (Fig. I.1). Les phénomènes hydrodynamiques tels que la marée, les vagues, le mélange des eaux douces et salées vont fortement influencer la dynamique sédimentaire. Nous allons décrire succinctement ces différents processus.

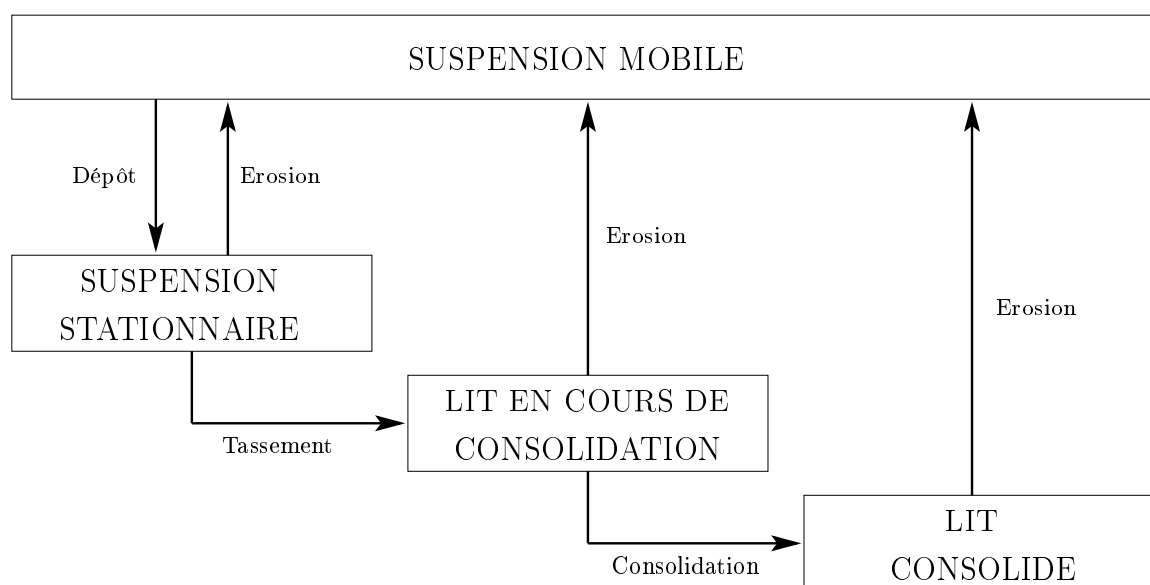


FIG. I.1 – Schéma général de la dynamique sédimentaire (d'après [Parker \(1986\)](#); [Mehta et al. \(1989\)](#))

La **sédimentation** est définie comme le processus de chute d'éléments solides (particules, flocons, agrégats, ...) dans un liquide sous l'action de la pesanteur et des forces de

frottement dues à la viscosité du fluide ; au cours de ce processus, les grains sont distants les uns des autres de sorte que les interactions directes entre particules sont faibles tant que la distance interparticulaire est grande.

Le **transport en suspension** des sédiments est assuré par l'advection, mouvement moyen, d'une part, et la dispersion liée aux fluctuations turbulentes d'autre part. Lorsque l'intensité de la turbulence devient trop faible, les particules sédimentaires se déposent sur le fond (*Eisma (1992)*, entre autres).

Le processus de **floculation** peut fortement influencer la sédimentation lorsque la teneur en argile de la suspension est importante. La floculation est donc un processus spécifique aux sédiments cohésifs. En observant une suspension concentrée au microscope, on peut voir sous certaines conditions des amas de particules appelés floes, eux-mêmes constitués de petits amas compacts de particules fines appelés agrégats (*Mewis and Spaul, 1976*). La formation d'une telle structure est appelée agrégation, coagulation ou floculation. Les floes et les agrégats se forment par fixation de particules après une collision. Les mécanismes contribuant principalement à ce processus sont le mouvement brownien résultant de l'agitation thermique des molécules fluides, le cisaillement dû aux gradients de vitesse au sein du fluide et la vitesse de chute différentielle résultant des différences de forme et de taille des amas (*Hayter, 1983*). La fréquence des collisions augmente évidemment avec la concentration. Lorsque deux particules cohésives sont suffisamment proches, elles peuvent coaguler sous l'action de forces interparticulaires attractives diverses : effets de charges, de matières organiques etc

La **consolidation** correspond au tassement et à la densification d'un dépôt de sédiments par évacuation du liquide interstitiel sous l'action de la pression due au poids propre des grains et/ou à un chargement extérieur. Dans ce processus, le fluide interstitiel circule dans la matrice solide constituée par des grains très voisins voire en contact.

L'**érosion** peut être définie comme la remise en mouvement des particules du fond sédimentaire. L'érosion se produit lorsque la contrainte de frottement au fond devient suffisamment grande pour vaincre les forces de cohésion et de pesanteur qui maintiennent les particules au fond (*Partheniades, 1962*). L'érosion est d'autant plus efficace que la vase est fraîchement déposée et donc peu consolidée. Les vagues peuvent jouer un rôle important sur l'érosion en imposant un chargement cyclique du fond qui favorise la liquéfaction et la formation de rides ("ripple marks"), modifiant ainsi la rugosité.

Dans les estuaires à moyen et fort marnage, le transport des matières en suspension est souvent caractérisé par l'existence naturelle d'une zone d'accumulation des sédiments en suspension (*Glangaud, 1939*) appelée "**bouchon vaseux**" ("turbidity maximum" en anglais) dont la concentration peut varier entre quelques dizaines de milligrammes par litre à la surface et quelques grammes par litre au fond en fonction des estuaires et de l'instant de la marée. Le "bouchon vaseux" oscille et se déplace en fonction de la marée et du débit fluvial.

La décantation rapide du bouchon vaseux pendant les périodes de marée de morte-eau donne parfois lieu à l'apparition d'une couche de vase fluide concentrée : la "**crème de vase**" (ou "fluid mud" en anglais)(*Jouanneau and Latouche, 1981*). Celle-ci a été observée

dans de nombreux estuaires tels que la Gironde ([Allen, 1971](#)), la Loire ([Gallene, 1974](#)) et la Seine ([Lesourd, 2000](#)) en France. Son origine semble liée à des conditions hydrodynamiques de faible énergie et à la présence d'une quantité de matières en suspension suffisante pour générer un flux de sédimentation important.

I.2 Etat de l'art de la modélisation numérique classique du transport sédimentaire

L'approche couramment utilisée pour modéliser le transport sédimentaire en milieux côtiers et estuariens suppose que le domaine de calcul soit divisé en deux sous-domaines. L'un est constitué d'un milieu fluide au sein duquel la concentration de sédiments est faible. Dans ces conditions, les interactions fluide-particule peuvent être négligées et les particules sont considérées comme un "scalaire passif" exception faite de leur vitesse de chute qui doit être prescrite. L'autre sous-domaine, au fond, traite les phénomènes de tassement et de consolidation ([Kynch, 1952](#); [Terzaghi and Peck, 1967](#); [Gibson et al., 1967](#)). La définition de la transition entre le fond et le fluide au-dessus est toujours un problème délicat, dans la nature comme dans les modèles. Cette transition est souvent définie à partir d'une concentration ou d'une densité de référence. Cette ambiguïté dans la définition du fond est une des motivations fortes pour l'approche diphasique qui ne nécessite pas une telle définition. L'un des points délicats dans l'approche classique consiste à modéliser les échanges de matières entre ces deux sous-domaines. Ils doivent être paramétrisés par l'intermédiaire de formules empiriques ([Krone, 1962](#); [Partheniades, 1965](#)).

I.2.1 Un bref historique

Depuis les années 60, avec l'avènement de l'informatique, de nombreux modèles mathématiques et numériques ont été développés. Ils se sont tout d'abord intéressés aux écoulements monodimensionnels afin d'étudier la propagation de la marée et des crues. Ces modèles fournissent la vitesse moyenne sur la section et la hauteur d'eau. Avec les modèles bidimensionnels horizontaux (Saint-Venant) ([Cole and Miles, 1983](#); [Nguyen, 1988](#); [Guillou, 1996](#); [Galland et al., 1991](#)) et verticaux ([Boericke and Hogan, 1977](#); [De Borne de Grandpré, 1979](#); [Li, 1994](#); [Li et al., 1994](#)), la structure de l'écoulement a pu être décrite de manière plus générale. Enfin, depuis les années 80, les modèles tridimensionnels ont permis de simuler les problèmes les plus généraux. Parmi ces modèles nous pouvons citer POM ([Blumberg and Mellor, 1987](#)), ECOMOD3D ([Nguyen, 1988](#)), TELEM3D ([Janin et al., 1992](#)), SAM3D ([Cugier, 1999](#)) ou encore ROMS ([Haidvogel and Beckmann, 1999](#)).

La sédimentologie s'est tout d'abord heurtée au problème de l'observation des sédiments en milieux estuariens. Dans les années 60 les travaux de [Krone \(1962\)](#), [Partheniades \(1965\)](#) et [Migniot \(1968\)](#) ont permis la caractérisation des propriétés des sédiments cohésifs et des phénomènes fondamentaux induits dans le transport sédimentaire et l'évolution des fonds :

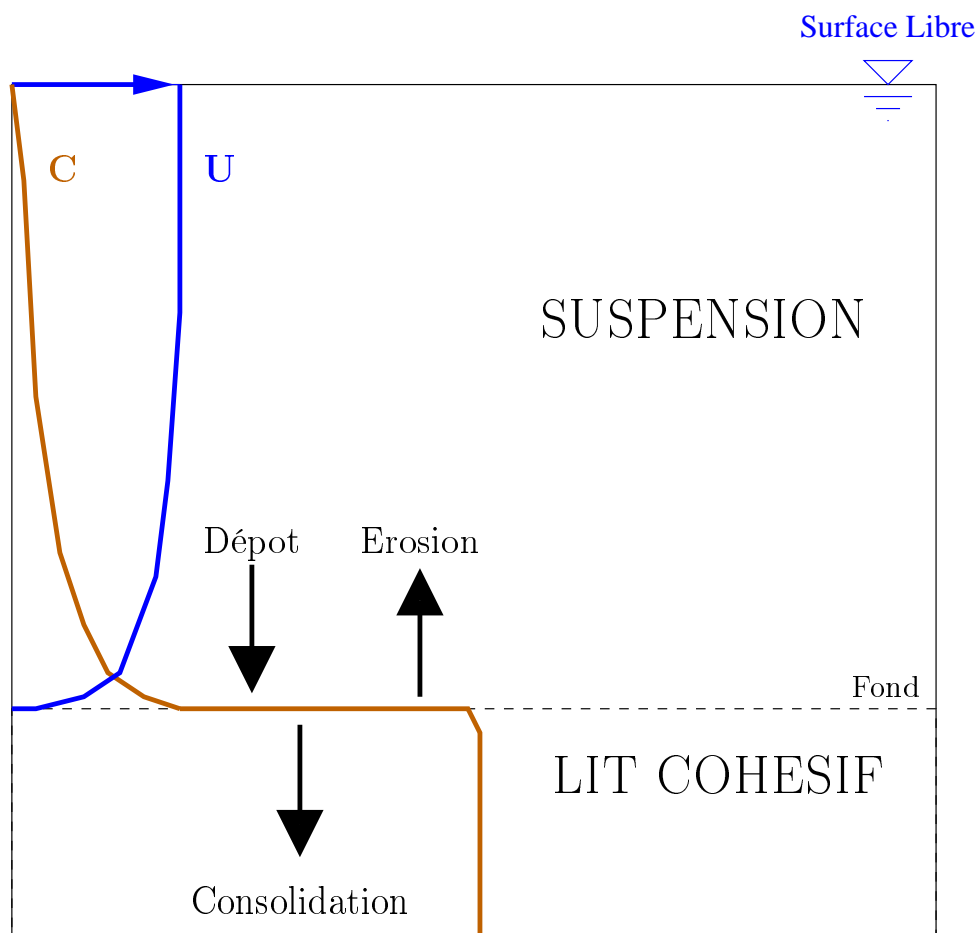


FIG. I.2 – Schéma de principe des modèles hydrosédimentaires classiques

- La floculation ;
- La formation et le déplacement du "bouchon vaseux" ;
- La formation de la "crème de vase" et les échanges de matières avec la colonne d'eau ;
- L'adsorption des polluants par les sédiments.

A la fin des années 70, [Ariathurai and Arulanandan \(1977\)](#) ont présenté le premier modèle sédimentologique d'estuaire. Depuis le milieu des années 80, de nombreux modèles de transport sédimentaire tridimensionnel ont été développés ([Nicholson and O'Connor, 1986](#); [Lenormand et al., 1993](#); [Cugier, 1999](#); [Phan, 2002](#)). Ils sont basés sur l'hypothèse du scalaire passif pour le transport des sédiments.

Récemment [Willis and Krishnappan \(2005\)](#) ont publié une revue sur la modélisation numérique du transport des sédiments cohésifs. La conclusion de cette étude révèle que les modèles sédimentaires constituent plutôt un cadre pour l'interpolation et l'extrapolation des mesures, contrairement aux modèles hydrodynamiques qui sont basés sur des principes plus physiques. Le fort degré d'empirisme introduit dans les modèles sédimentaires actuels rend nécessaire la réalisation d'une calibration sur deux jeux de données indépendantes obtenues dans les conditions les plus proches possibles des conditions naturelles.

I.2.2 Modélisation de la suspension

Pour la suspension une équation d'advection diffusion est résolue (Eq. 1.1) pour la concentration en particules C . On suppose que les particules n'interagissent pas avec le fluide et se comportent comme un traceur passif pour l'écoulement, exception faite de leur vitesse de chute w_c .

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (U_{f,i} - w_c \delta_{i3}) \frac{\partial C}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(K^t \frac{\partial C}{\partial x_i} \right) \quad (\text{I.1})$$

$U_{f,i}$ désigne la i^{me} composante de la vitesse moyenne du fluide, w_c représente la vitesse de chute des particules, K^t le coefficient de dispersion turbulente pour les particules. δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker.

Au sein de la suspension, du fait de faible concentration en particules, les interactions entre les particules sont peu importantes et les processus en compétition sont la sédimentation, la dispersion par le mouvement turbulent du fluide et la floculation. Comme expliqué précédemment la vitesse de chute des sédiments doit être prescrite. Il convient tout d'abord de rappeler la loi de Stokes qui permet d'obtenir la vitesse limite de chute d'une particule sphérique seule. Cette valeur sert souvent de référence pour les autres lois de vitesse de chute incluant notamment l'influence de la floculation.

a) La loi de Stokes

L'équilibre des forces appliqué à une particule exprime le fait que le poids est contrebalancé par les effets de flottabilité et de traînée résultant du mouvement relatif de la particule par rapport au fluide. L'expression de la vitesse limite de Stokes pour la particule s'écrit sous la forme :

$$w_c = -\frac{g}{18\mu_f} (\rho_s - \rho_f) d_p^2 \quad (\text{I.2})$$

g désigne l'accélération de la pesanteur et μ_f représente la viscosité dynamique du fluide. ρ_s et ρ_f représentent respectivement la masse volumique de la particule et du fluide. d_p désigne le diamètre de la particule.

Ce résultat est valable tant que l'écoulement fluide autour de la particule est laminaire ($Re \ll 1$). Si cette hypothèse n'est pas vérifiée, différents auteurs comme [Oseen \(1910\)](#) ou [Schiller and Naumann \(1933\)](#) et d'autres, ont proposé des formulations pour étendre ce type de résultats pour des nombres de $Re > 1$.

b) Influence de la floculation

Les sédiments cohésifs sont par nature sujets au processus de floculation. Les agrégats ont des formes variées mais rarement sphériques, leurs tailles sont nettement supérieures à celles des particules élémentaires et ils incorporent de l'eau au cours du processus d'agrégation, leur densité diminue donc en conséquence. Ces facteurs influent sur la vitesse de chute des sédiments cohésifs. Aux faibles concentrations la vitesse de chute augmente, due

à la taille importante des floes et elle diminue fortement avec la concentration sous l'effet de l'entravement.

Lois empiriques

Une des solutions pour intégrer le processus de floculation dans ces modèles consiste à imposer une loi de vitesse de chute dépendant de la concentration. L'une des premières études majeures considérant la floculation est celle de [Tambo and Watanabe \(1979\)](#). A partir d'une série de clichés, ces auteurs ont déterminé une relation entre la densité des flocons ρ_{flocs} et leurs diamètres d_{flocs} : $\rho_{flocs} = \rho_f + \frac{a}{(d_{flocs})^{K^\rho}}$. La vitesse de chute suit une loi de la forme :

$$w_{flocs} = \frac{g}{34\mu_f} (\rho_{flocs} - \rho_f) d_{flocs}^2 \quad (I.3)$$

Pour des argiles de diamètre $d_{flocs} = 3.5\mu m$, les valeurs suivantes des coefficients sont préconisées : $2.10^{-4} < a < 14.10^{-4}$ et $0.9 < K^\rho < 1.5$.

En général, les méthodes relient expérimentalement la vitesse de chute apparente à la concentration massique des sédiments. Pour les faibles concentrations ($C \leq 10g/l$), les collisions entre particules augmentent avec la concentration favorisant ainsi la floculation. La vitesse de chute est donc une fonction croissante de la concentration et suit une loi du type : $w_{chute} = K_{low}.C^n$, où K_{low} est une constante empirique dépendant de la granulométrie et n varie entre 1.1 et 3. Pour des concentrations plus élevées, la vitesse de chute diminue, due aux effets d'entravements. Une loi de [Richardson and Zaki \(1954\)](#) est souvent utilisée : $w_{chute} = w_0 (1 - K_{high}.C)^\gamma$, où w_0 est une vitesse de chute de référence, K_{high} une constante dépendant du sédiment et γ un coefficient de l'ordre de 5. A titre d'exemple, la loi de [Thorn \(1981\)](#) s'écrit comme suit :

$$w_c = \begin{cases} 0,513C^{1,3} & \text{pour } C \leq 3 \text{ g.l}^{-1} \\ 2,6.10^{-3} (1 - 0,008C)^{4,65} & \text{pour } 3 < C < 100 \text{ g.l}^{-1} \end{cases} \quad (I.4)$$

Modèle multi-classe de floculation

On considère ici un ensemble constitué de N classes de particules, de diamètre d_k , pouvant s'agglomérer ou se désagréger. Ces modèles sont basés sur l'équation de [Smoluchowski \(1917\)](#) (Eq. I.5) qui exprime le taux de variation du nombre de particules pour chaque classe de taille (n_k).

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} = \frac{1}{2} \sum_{i+j=k} \gamma_{i,j} n_i n_j - \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_{i,k} n_i n_k \quad (I.5)$$

i, j et k désignent les indices des différentes classes de taille de particules. Le premier terme du membre de droite représente l'agrégation de particules dont le volume total est égal à celui de la classe de taille k. Le facteur un demi assure que chaque agrégation ne sera comptabilisée qu'une seule fois. Le second terme du membre de droite correspond à

la diminution de particules de la classe de taille k due à leur agrégation avec des particules des autres classes de taille.

Le système différentiel ainsi formé est non-linéaire et n'admet pas de solution immédiate. [Smoluchowski \(1917\)](#) a proposé un certain nombre d'hypothèses simplificatrices :

- Le facteur d'efficacité des collisions est égal à l'unité pour toutes les collisions ;
- L'écoulement du fluide est laminaire ;
- Il n'y a pas de rupture de floes ;
- Les particules sont sphériques ;
- Les collisions sont binaires.

L'expression (Eq. [I.6](#)) inclut les effets dus au mouvement brownien, aux gradients de vitesse fluide et à la chute différentielle des particules ([Thomas et al., 1999](#)).

$$\gamma_{i,j} = \left[\frac{2k_B T}{3\mu_f} \left(\frac{1}{d_i} + \frac{1}{d_j} \right) + \frac{G}{6} (d_i + d_j)^2 + \frac{g\pi}{72\mu_f} (\rho_s - \rho_f) (d_i + d_j)^2 |d_i - d_j| \right] (d_i + d_j) \quad (\text{I.6})$$

où k_B désigne la constante de Boltzmann et $G = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\nu_f}}$ désigne le paramètre de dissipation. T représente la température du milieu. Une étude détaillée de ces modèles a été présentée par [Verney \(2006\)](#). Une alternative à cette approche consiste à considérer un diamètre équivalent représentatif des floes, évoluant dans l'espace et le temps, incluant les effets d'agrégation et de rupture des floes sous l'effet du cisaillement turbulent. Une telle approche a été proposée par [Winterwerp \(1998\)](#) (Cf. Annexe [B](#)).

c) Modélisation de la dispersion turbulente

Classiquement le coefficient de dispersion turbulente pour les particules est mis en relation avec la viscosité turbulente du fluide par l'intermédiaire d'une loi empirique :

$$K^t = \phi_{Ri} \frac{\nu_f^t}{\sigma_c} \quad (\text{I.7})$$

où ν_f^t désigne la viscosité turbulente du fluide en milieu non stratifié, $\phi_{Ri} = (1 + aR_i)^b$ le nombre de Richardson et σ_c le nombre de Schmidt turbulent. Les coefficients empiriques a , b et σ_c doivent être calibrés à partir de données expérimentales. Ils dépendent de la nature des sédiments.

Cette approche pose des problèmes du fait de son manque de fondement physique. Nous expliquerons plus en détail par la suite en quoi une approche diphasique du transport sédimentaire permet une description plus appropriée de ce phénomène. Ce point constitue une justification importante pour le développement d'un modèle diphasique de transport sédimentaire.

I.2.3 Les flux d'échanges entre le fond sédimentaire et la suspension

Les flux d'érosion et de dépôt font intervenir la contrainte de cisaillement au fond τ_b . τ_b est lié d'une part à l'adhérence du fluide sur le fond et au gradient vertical des vitesses qui en résulte et d'autre part aux fluctuations des vitesses par la contrainte de Reynolds. Cette dernière étant généralement prépondérante dans les écoulements côtiers et estuariens.

$$\tau_b = \mu_f \frac{\partial u_f}{\partial z} + \rho_s \langle u'_f w'_f \rangle \quad (\text{I.8})$$

u'_f et w'_f désigne respectivement les fluctuations de vitesse horizontale et verticale du fluide associée à l'opérateur de moyenne $\langle . \rangle$.

a) Loi décrivant les flux d'érosion

De nombreuses lois d'érosion ont été proposées, d'une manière générale il est admis qu'il existe une contrainte de frottement seuil au-dessus de laquelle il y a érosion et que le flux d'érosion dépend directement de l'excès de la contrainte de frottement par rapport à ce seuil. La valeur de la contrainte à partir de laquelle l'érosion se produit est appelée contrainte critique d'érosion (τ_{ce}). Cette valeur dépend de la nature et de la forme du fond et des sédiments ainsi que de l'état de consolidation du fond. Parmi toutes les formulations existantes, la loi de [Partheniades \(1962\)](#) est la plus classique et historiquement la plus utilisée :

$$\mathcal{F}_E = \begin{cases} \mathcal{F}_0 \frac{\tau_b - \tau_{ce}}{\tau_{ce}} & \text{si } \tau_b \geq \tau_{ce} \\ 0 & \text{si } \tau_b < \tau_{ce} \end{cases} \quad (\text{I.9})$$

Où \mathcal{F}_E est le flux de sédiments érodés au fond, \mathcal{F}_0 est une constante d'érosion ($kg.m^{-2}.s^{-1}$) dépendant de l'état de consolidation du fond. τ_{ce} est la contrainte critique de cisaillement pour l'érosion dépendant de la nature du matériau constituant le fond et de son état de consolidation. [Mehta \(1988, 1991\)](#) propose d'autres lois différentes de celle de [Partheniades \(1962\)](#) mais basées sur le même principe.

b) Loi décrivant les flux de dépôt

Lorsque les particules sont peu concentrées et dispersées, le flux s'obtient par application directe de la loi de Stokes. Pour des concentrations $> 0,1 g.l^{-1}$, la loi classique de dépôt est celle de [Krone \(1962\)](#) :

$$\mathcal{F}_D = \begin{cases} w_c C \left(1 - \frac{\tau_b}{\tau_{cd}} \right) & \text{si } \tau_b \leq \tau_{cd} \\ 0 & \text{si } \tau_b > \tau_{cd} \end{cases} \quad (\text{I.10})$$

où \mathcal{F}_D est le flux de matières en suspension (MES) déposées sur le fond, τ_{cd} représente la contrainte critique de dépôt qui dépend de la concentration des MES et de l'écoulement près du fond. Au-dessus de cette valeur critique le flux de dépôt est nul.

L'utilisation de ces lois pose la question de la simultanéité du dépôt et de l'érosion. En effet, certains modélisateurs choisissent la valeur de la contrainte critique de dépôt supérieure à la valeur critique de la contrainte de cisaillement pour l'érosion ce qui revient à considérer que les deux processus ont lieu simultanément. Un élément de réponse est apporté par [Lau and Krishnappan \(1994\)](#) qui ont clairement montré par des expériences en laboratoire que ces deux processus ne pouvaient se produire en même temps. Cependant, [Sanford and Halka \(1993\)](#) ont montré que la séparation du dépôt et de l'érosion ne permettait pas de reproduire les mesures *in-situ*. Selon ces auteurs le meilleur compromis est obtenu en supposant un dépôt continu soit une contrainte critique de dépôt nulle. Trois explications sont avancées pour expliquer cette différences entre les expériences de laboratoire et les mesures *in-situ* : la contrainte de cisaillement au fond a une variabilité autour de sa valeur moyenne plus grande en nature qu'en laboratoire. Ce qui permettrait une érosion et un dépôt simultanés en différents endroits ou successivement en un même point dans la nature.

Le troisième argument avancé reprend les résultats de [Galland et al. \(1994\)](#) qui ont montré que le changement d'échelle des effets de stratification entre les expériences de laboratoire et la nature pouvait donner lieu à une sous-estimation importante de la contrainte de frottement au fond en nature. Ce qui a pour effet de diminuer l'érosion et d'augmenter le dépôt.

I.2.4 Modélisation du fond sédimentaire

Nous présentons succinctement les trois approches utilisées pour modéliser la consolidation. Nous rappelons tout d'abord l'approche empirique proposée par [Migniot \(1968\)](#). Ensuite nous présentons la théorie de [Kynch \(1952\)](#). Enfin, nous détaillons l'approche de la mécanique des sols proposée par [Terzaghi \(1923\)](#) et [Gibson et al. \(1967\)](#).

a) Approche phénoménologique de [Migniot \(1968\)](#)

[Migniot \(1968\)](#) a adopté un point de vue purement phénoménologique. A partir de nombreuses expériences en colonne de sédimentation il a établi une relation empirique de la concentration moyenne du dépôt (C_{depot}) en fonction du temps (t exprimé en heure) :

$$C_{depot} = C_1 \log(t/3600) + C_2 \quad (I.11)$$

Où C_1 et C_2 sont des constantes empiriques. C_1 est une fonction croissante du diamètre, i.e. plus les particules sont grosses plus elles chutent rapidement et donc plus la concentration du dépôt augmente vite. Cette constante évolue également au cours de la sédimentation, elle devient de plus en plus petite à mesure que le dépôt se tasse. [Migniot](#)

(1968) distingue 3 étapes : la décantation, l'élimination de l'eau interstitielle et l'élimination de l'eau fixée par les agrégats.

Migniot a également proposé une loi de répartition de la concentration dans le culot à l'asymptote du tassement, i.e. en fin de consolidation :

$$C(z) = C(z_i) + n \log(z \cdot 10^2) \quad (\text{I.12})$$

Avec $C(z_i)$ la concentration à l'interface eau claire-mélange et z la profondeur sous cette interface. n est un paramètre dépendant de la nature du mélange et des conditions de sédimentation $n \in [50; 80]$

Cette approche a été largement utilisée dans la pratique mais le manque de fondement physique et surtout la variabilité entre les valeurs prédites et celles mesurées limitent son application.

b) La théorie de *Kynch* (1952)

Kynch (1952) a proposé une analyse théorique du problème de la sédimentation en eau calme. Il considère la concentration en particules solides comme le paramètre prépondérant dans le processus de sédimentation. *Kynch* (1952) considère des niveaux de concentration constante se déplaçant vers le haut, dus à la chute des particules dans la colonne. Les trois hypothèses principales de cette théorie sont les suivantes :

- La vitesse de chute des particules ne dépend que de la concentration.
- Les particules ont la même forme, la même taille et la même densité.
- La concentration est constante dans tous les plans horizontaux de la colonne.

Cette théorie a été établie pour des suspensions parfaites monodispersées. Son application à des suspensions réelles, bien qu'elle fournisse des résultats raisonnables dans certains cas, doit se faire avec prudence.

En écrivant l'équation de conservation de la masse pour les particules sur la verticale :

$$\frac{\partial \alpha_s}{\partial t} + \frac{\partial w_s \alpha_s}{\partial z} = 0 \quad (\text{I.13})$$

où α_s représente la fraction volumique de la phase solide, w_s désigne la vitesse de chute des sédiments et $S_s = w_s \alpha_s$ le flux solide.

Cette équation aux dérivées partielles est une équation d'onde du premier ordre. On peut l'interpréter en considérant que α_s se propage verticalement dans la colonne à la vitesse $V = \frac{dS_s}{d\alpha_s}$. La relation entre cette vitesse et la fraction volumique de particules est déterminée expérimentalement. L'évolution du profil de concentration est alors déterminée par l'équation (Eq. I.14).

$$\frac{\partial \alpha_s}{\partial t} + \frac{dS_s}{d\alpha_s} \frac{\partial \alpha_s}{\partial z} = 0 \quad (\text{I.14})$$

c) **Approche selon la mécanique des sols** ([Terzaghi, 1923](#); [Gibson et al., 1967](#))

Cette approche est due historiquement à [Terzaghi \(1923\)](#) qui a établi un modèle d'évolution de la vitesse de tassement d'une couche d'argile saturée. Ces travaux ont été complétés et généralisés par [Terzaghi and Peck \(1967\)](#); [Gibson et al. \(1967\)](#). Les hypothèses du modèle peuvent-être résumées de la façon suivante :

- Le mouvement est unidimensionnel vertical ;
- Les effets d'inertie sont négligés ;
- La contrainte effective (σ') et la perméabilité (k_p) ne dépendent que de l'indice des vides (e_v) ;
- L'écoulement suit une loi de Darcy généralisée ;
- Les phases fluide et solide sont incompressibles ;
- La distribution granulaire est uniforme.

$$\frac{\partial e_v}{\partial t} + \frac{\rho_s - \rho_f}{\rho_f} \frac{\partial}{\partial e_z} \left(\frac{k_p}{1 + e_v} \right) \frac{\partial e_z}{\partial \varsigma} + \frac{1}{\rho_f} \left[\frac{k_p}{1 + e_v} \frac{\partial \sigma'}{\partial e_v} \frac{\partial e_z}{\partial \varsigma} \right] = 0 \quad (\text{I.15})$$

ς désigne la coordonnée matérielle ou lagrangienne *i.e.* : en suivant le mouvement.

Les contraintes effectives caractérisent les contraintes granulaires liées au contact et au frottement entre les particules. Les lois constitutives de perméabilité et de contrainte effectives sont déterminées empiriquement en utilisant les méthodes classiques de la mécanique des sols.

I.2.5 Vers une théorie unifiée du transport sédimentaire

[Toorman \(1996\)](#) a montré que les théories de la sédimentation et de la consolidation pouvaient être unifiées, la différence de modélisation entre ces deux phénomènes résidant dans les lois constitutives utilisées. L'évolution de la concentration en sédiments est liée au flux de masse de sédiments obtenu à partir de l'équation de la conservation de la masse. La vitesse de dépôt des sédiments est obtenue à partir de l'équation d'équilibre des forces appliquées aux particules. [Toorman \(1996\)](#) a ainsi dérivé l'équation de [Gibson et al. \(1967\)](#) à partir des équations précédemment décrites.

Selon l'auteur la fraction volumique de sédiments est la variable la plus pertinente pour traiter globalement des problèmes de sédimentation et de tassement/consolidation. De plus, cette formulation permet d'étendre la théorie au cas d'une suspension polydisperse en introduisant différentes classes de particules. Cela permettrait de traiter des problèmes de ségrégation suivant la taille, processus d'une grande importance dans les applications sédimentologiques. Beaucoup de connaissances sont encore nécessaires pour déterminer les lois constitutives les plus adaptées à la modélisation de chaque processus.

I.3 Etat de l'art de la modélisation numérique diphasique du transport sédimentaire

Depuis le début des années 90, une nouvelle approche, basée sur un concept proposé par [Wallis \(1969\)](#), est réalisée pour la modélisation numérique des phénomènes sédimentaires par une approche à deux phases ([Teisson et al., 1992](#); [Le Hir, 1994](#); [Le Hir and Cugier, 1994](#); [Vilaret et al., 1996](#); [Greimann et al., 1999](#); [Barbry et al., 2000](#); [Greimann and Holly, 2001](#); [Hsu et al., 2003](#); [Jiang et al., 2004](#); [Amoudry et al., 2005](#)). Le milieu est défini comme constitué de deux phases : une phase continue, l'eau et une phase dispersée, les sédiments. Des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement sont écrites pour chaque phase. L'intérêt majeur d'un modèle diphasique est de considérer l'ensemble des processus de transport des particules en suspension, de sédimentation, de tassement et de consolidation de manière continue. Par conséquent, le domaine étudié est considéré dans son ensemble sans découpage en sous-domaines. Les échanges entre le fond sédimentaire et le milieu fluide sont intégrés aux équations du modèle. Le développement d'un tel modèle constitue une étape vers une approche intégrée du transport sédimentaire.

I.3.1 Description mathématique de la modélisation diphasique

Dans l'approche à deux phases (fluide - particule solide) on considère que les mouvements de chaque phase sont régis respectivement par deux équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement. Ainsi en notant k , l'indice désignant la phase fluide ou la phase solide, les équations de conservation sont données par les équations (Eq. I.16) et (Eq. I.17), respectivement ([Drew and Lahey, 1993](#)).

$$\frac{\partial \alpha_k \rho_k}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\alpha_k \rho_k \vec{u}_k) = 0 \quad (\text{I.16})$$

$$\frac{\partial \alpha_k \rho_k \vec{u}_k}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\alpha_k \rho_k \vec{u}_k \otimes \vec{u}_k) = \vec{\nabla} \cdot (\alpha_k (\overline{\overline{T}}_k^{Re} + \overline{\overline{T}}_k)) + \alpha_k \rho_k \vec{g} + \overline{\overline{M}}_k \quad (\text{I.17})$$

Dans ces équations, α_k , \vec{u}_k , ρ_k représentent respectivement la fraction volumique, le vecteur vitesse et la masse volumique de la phase k . \vec{g} est le vecteur accélération de la pesanteur. $\overline{\overline{T}}_k^{Re}$ représente le tenseur des contraintes de Reynolds et $\overline{\overline{T}}_k$ le tenseur des contraintes de frottement qui est donné en fonction de la pression p_k et du déviateur des contraintes $\overline{\overline{\tau}}_k$ (contrainte visqueuse) par la relation (I.18).

$$\overline{\overline{T}}_k = -p_k \overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}}_k \quad (\text{I.18})$$

$\overline{\overline{I}}$ désigne le tenseur unité.

Le terme $\overline{\overline{M}}_k$ représente le transfert de quantité de mouvement entre les phases.

Afin de résoudre le système d'équations aux dérivées partielles (Eq. I.16) et (Eq. I.17), l'imposition d'un certain nombre de relations complémentaires, appelées lois de fermeture est nécessaire. Il en existe de plusieurs types : les lois de transfert, constitutives et

topologiques.

Les lois de transfert décrivent les interactions entre les phases qui apparaissent à leurs interfaces. Elles sont représentées dans l'équation (Eq. I.17) par le terme \vec{M}_k . Le terme de contrainte $\bar{\bar{T}}_k$ doit être modélisé, ceci est réalisé par les lois constitutives. Il s'agit essentiellement d'imposer la relation entre le tenseur des contraintes $\bar{\bar{T}}_k$ et le tenseur des vitesses de déformation $\bar{\bar{D}}_k = \frac{1}{2} \left[\vec{\nabla} \vec{u}_k + \left(\vec{\nabla} \vec{u}_k \right)^T \right]$ ainsi que la relation exprimant le gradient de pression pour la phase solide. En ce qui concerne les lois topologiques, elles correspondent à des conditions liées à la géométrie du milieu, nous en voyons un exemple au chapitre II.

A partir du système d'équations (Eq. I.16) et (Eq. I.17) deux approches peuvent être envisagées. La plus simple consiste à écrire une équation de conservation de la quantité de mouvement pour le mélange en sommant l'équation (Eq. I.17) sur les deux phases. Le terme d'interaction se simplifie et une équation semblable à l'équation de Navier-Stokes pour un écoulement fluide est obtenue. Cette approche est qualifiée suivant les auteurs de modèle bi-espèce ou d'écoulement mélangé (*mixed-flow model* en anglais). Une autre solution considère les équations de conservation de la quantité de mouvement séparément pour chaque phase (Eq. I.17). Il s'agit alors de résoudre le système d'équations aux dérivées partielles couplées constitué des équations (Eq. I.16) et (Eq. I.17) pour chaque phase. Ces modèles sont qualifiés de modèles à deux fluides (*two-fluid model* en anglais).

I.3.2 Revue bibliographique sur la modélisation diphasique du transport sédimentaire

[Teisson et al. \(1992\)](#) ont présenté un modèle à deux fluides unidimensionnel vertical pour la simulation du transport sédimentaire basé sur les travaux de [Simonin \(1991\)](#). Ce modèle est basé sur la résolution des équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique turbulente pour chaque phase. La force de traînée et les effets de dispersion des particules par l'écoulement turbulent du fluide sont modélisés dans le terme de transfert de quantité de mouvement. La turbulence est modélisée par un modèle à équation de transport du premier ordre de type $k - \varepsilon$ ([Bel Fdhila and Simonin, 1992](#)). Les résultats présentés permettent d'illustrer l'intérêt de cette approche. L'accent est mis en particulier sur les perspectives pour le transport de sédiment cohésif.

Depuis les travaux de [Teisson et al. \(1992\)](#), plusieurs auteurs ont proposé des modèles unidimensionnels verticaux ([Le Hir, 1994](#); [Le Hir and Cugier, 1994](#)), les variations horizontales sont nulles et seul le gradient horizontal de pression est imposé comme un forçage extérieur. Les phases fluide et solide ont alors la même vitesse horizontale, les termes d'accélération et d'inertie selon la direction verticale sont négligés et seule la force de traînée est considérée dans le terme d'interaction entre les phases. Comme le rappelle [Le Hir \(1994\)](#), ces hypothèses sont extrêmement restrictives et ne permettent pas de réaliser des simulations sur des cas réalistes.

[Rouas \(1996\)](#) présente dans sa thèse un modèle unidimensionnel de sédimentation

basé sur la résolution d'une équation de conservation de la quantité de mouvement pour le mélange eau-sédiment. La vitesse verticale des sédiments est imposée de manière empirique comme une fonction de la concentration et une loi de contrainte dépendant de la concentration est imposée.

Vilaret and Davies (1995) présentent une comparaison entre un modèle classique et le modèle diphasique présenté par *Teisson et al.* (1992) sur les interactions entre les particules et l'écoulement turbulent dans le cas de particules non-cohésives. Les auteurs concluent que les deux approches décrivent raisonnablement le phénomène. Mais seule l'approche diphasique incorpore suffisamment de physique pour représenter les processus près du fond. Alors que le modèle classique, basé sur l'hypothèse du scalaire passif, repose sur plus de paramètres d'entrées empiriques pour les conditions au fond. En particulier, cette approche nécessite d'imposer une concentration de référence à une hauteur donnée et une échelle de longueur caractéristique de la rugosité du fond. De plus la valeur du paramètre pour la correction de la viscosité turbulente due aux effets de stratification montre une variabilité d'une expérience à une autre, ce qui nuit beaucoup à la généralité de cette approche.

Vilaret et al. (1996) ont repris le modèle proposé par *Teisson et al.* (1992) et ont introduit un modèle de floculation inspiré des travaux de *Van Leussen* (1994). Une équation de transport pour le nombre de particules par unité de masse est calculée incluant un terme d'agrégation et de rupture. Les échanges de masse entre la phase fluide et la phase solide sont introduits pour prendre en compte l'eau absorbée dans les flocs. Ce terme est représenté de manière empirique en imposant la relation entre la masse volumique des flocs et leurs diamètres : $\rho_s = \rho_f + \frac{A}{d_p}$. Où A est une constante dépendant de la nature des sédiments ($A \approx 10^{-3}$). La résolution numérique est réalisée en deux étapes, tout d'abord les mécanismes de collision et agrégation/rupture des flocs sont calculés, puis le changement de masse volumique de la phase solide et les échanges de masses sont réalisés. La taille des flocs dépend localement de l'échelle de Kolmogorov et ce paramètre a une influence déterminante sur le profil à l'équilibre du diamètre des particules.

Plus récemment, *Greimann et al.* (1999) se sont intéressés au transport de sédiments non-cohésifs dans le cas d'un écoulement dans un canal ouvert. Suivant l'idée de *Simonin* (1991) ces auteurs ont porté leur attention sur l'effet de la turbulence sur le comportement des particules en suspension. Plus particulièrement, ils ont développé des formules analytiques dans le cas d'un écoulement dilué, en considérant l'effet des fluctuations de vitesses sur la force de traînée : la vitesse de dérive ("*drift velocity*"). *Greimann et al.* (1999) ont présenté deux formules analytiques, l'une pour le profil de concentration (Eq. 1.20), l'autre pour le défaut de vitesse horizontale entre les phases ("*lag velocity*") $U_{lag} = U_f - U_s$ (Eq. 1.22). *Greimann et al.* (1999) font l'hypothèse que les corrélations des fluctuations de vitesse fluide et solide peuvent être, dans le cas d'un écoulement dilué, considérées égales aux corrélations des fluctuations de vitesse fluide. Ce qui leur permet d'utiliser le profil théorique proposé par *Nezu and Nakagawa* (1993) (Eq. 1.19) et ainsi d'aboutir aux formulations analytiques présentées ci-dessous :

$$\overline{w_f'^2} = u_*^2 C_\nu e^{-1.34\sigma}, \quad (\text{I.19})$$

où u_* la vitesse de frottement au fond, $C_\nu = 1.51$ une constante.

$$\frac{\alpha_s}{\alpha_s^0} = \left[\frac{\sigma - \frac{1}{2}(1 + S')}{\sigma - \frac{1}{2}(1 - S')} \frac{\sigma_0 - \frac{1}{2}(1 + S')}{\sigma_0 - \frac{1}{2}(1 - S')} \right]^{r_e/S'}, \quad S' = \sqrt{1 + \frac{4C_\nu St_b}{\gamma_c \kappa}} \quad (\text{I.20})$$

σ désigne la hauteur adimensionnelle au-dessus du fond, α_s^0 représente la concentration de référence à la hauteur adimensionnelle au-dessus du fond de référence σ_0 . L'exposant de cette formule fait intervenir $r_e = \frac{w_c}{\gamma_c \kappa u_*}$ en fonction de w_c la vitesse de chute, $\gamma_c = [1 + C_\beta \cdot (3 \parallel \vec{u}_r \parallel^2)/(2k_f)]^{-1/2}$ l'effet des trajectoires croisées (ce point est abordé plus en détail au chapitre II), κ_c la constante de Von Karman, $\vec{u}_r = \vec{u}_s - \vec{u}_f$ la vitesse relative entre les phases solide et fluide, les auteurs supposent que la vitesse relative est égale à la vitesse de chute des particules w_c et k_f désigne l'énergie cinétique turbulente de la phase fluide. Enfin, $St = \frac{\tau_{fs}}{\tau_{fb}}$ représente le nombre de Stokes où $\tau_{fs} = \frac{w_s \rho_s}{g(\rho_s - \rho_f)}$ désigne le temps caractéristique des particules et $\tau_{fb} = \frac{u_*}{H}$ un temps caractéristique de l'écoulement fluide. Lorsque $St = 0$ et $\gamma_c = 1$ ce modèle est équivalent au modèle de [Rouse \(1937\)](#) (Eq. I.21).

$$\frac{\alpha_s}{\alpha_s^0} = \left[\frac{\sigma - 1}{\sigma} \frac{\sigma_0}{\sigma_0 - 1} \right]^{r_e} \quad (\text{I.21})$$

Ce qui montre que la solution de Rouse est valable si le nombre de Stokes est négligeable devant 1 $St \ll 1$.

$$U_{lag} = U_f - U_s = -U_d = \frac{2}{3} w_s (1 - \sigma) e^{1.34\sigma} \quad (\text{I.22})$$

Ce qui montre que le défaut de vitesse horizontale entre les phases est du même ordre de grandeur que la vitesse de chute des particules. Ceci est en accord avec les mesures expérimentales de [Muste and Patel \(1997\)](#) et [Kaftori et al. \(1996\)](#). Le profil théorique obtenu est en accord avec ces mesures puisqu'il prédit un maximum près du fond et une décroissance vers la surface libre où le profil est nul.

Ces approches permettent, sans ajuster de coefficients empiriques, de reproduire des phénomènes observés expérimentalement mais inexpliqués en théorie jusqu'alors :

- l'augmentation des effets de dispersion avec la taille des particules ;
- le défaut de vitesse horizontale entre les phases fluide et solide.

[Greimann and Holly \(2001\)](#) étendent l'analyse précédente en prenant en compte les interactions particule-particule et proposent ainsi une solution semi-analytique pour le profil de concentration dans le cas d'un écoulement uniforme et stationnaire en canal ouvert à fond plat. Les interactions particule-particule sont modélisées à partir de la théorie cinétique des écoulements granulaires ([Grad, 1949](#); [Chapman and Cowling, 1970](#)) en introduisant le terme de contrainte normale verticale. Les auteurs déduisent de leur étude les critères suivants :

- Si $\frac{St}{\kappa\sigma} \ll 1$ alors les effets d'inertie sont négligeables.
- Si $\alpha_s \ll 0,1$ alors les interactions particule-particule sont négligeables.

Les problèmes évoqués par les auteurs résident dans le manque de connaissances expérimentale et théorique sur les effets de modulation de la turbulence par la présence des particules et sur la nécessité de développer une condition limite pour la fraction volumique de particule dans le cas d'un fond sédimentaire.

Barbry (2000); *Barbry et al.* (2000) ont présenté un modèle bidimensionnel vertical basé sur la résolution des équations (Eq. 1.16) et (Eq. 1.17) pour chaque phase (modèle à deux fluides). Ce modèle fait l'objet d'une présentation détaillée dans la section suivante (1.3.3).

Hsu et al. (2003) se basent sur les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement proposées par *Drew* (1983). Afin de modéliser la turbulence de grande échelle au sein de la phase fluide, grande échelle par rapport aux diamètres des particules. Les auteurs appliquent une moyenne de *Favre* (1965) aux équations précédentes. Une démarche similaire à celle proposée par *Drew* (1976) est employée pour obtenir des fermetures pour les corrélations d'ordre élevé. Deux approches de résolution sont présentées, une approche semi-analytique et une résolution numérique complète des équations. Dans la première approche, des approximations sont faites pour représenter les processus dans la couche de fond et permettent d'obtenir une solution pour le profil de concentration qui constitue une amélioration du profil de *Rouse* (1937). De plus, l'influence des particules sur la turbulence du fluide est prise en compte dans l'expression analytique pour l'énergie cinétique turbulente du fluide et une expression de la constante de Von Karman en fonction de la concentration locale de sédiments, de la turbulence fluide et des propriétés des sédiments est obtenue. L'atténuation de la turbulence est ainsi reliée à la diminution de la longueur de mélange.

Amoudry et al. (2005) ont prolongé les travaux de *Hsu et al.* (2003) en étudiant le cas du transport de sédiments sous l'action combinée de vagues et de courants. Ce travail porte sur la proposition d'une formulation du nombre de Schmidt en fonction de la concentration en sédiments. Dans le cas d'un écoulement oscillant, l'influence du nombre de Schmidt est très marquée sur le profil vertical de concentration mais n'affecte pas le déphasage entre le mouvement des sédiments et celui du fluide. Les auteurs aboutissent également à la conclusion que l'imposition d'une concentration de références semble plus adaptée que la fonction empirique de "pick-up" proposée par *Van Rijn* (1984).

Jiang et al. (2004) proposent une approche similaire à celle de *Greimann et al.* (1999) basée sur un modèle de groupe de particules (Particle Group Model). Une expression analytique pour le profil de concentration et le défaut de vitesse horizontale entre les phases est présentée. Les résultats obtenus n'apportent pas d'amélioration majeure par rapport à ceux de *Greimann et al.* (1999).

Freson (2004) présente un modèle diphasique à deux fluides et une version "bi espèce" pour traiter le problème des rejets de dragage par clapage. Dans ces deux approches l'évolution de la surface libre n'est pas prise en compte. Le modèle "bi espèce" a fait l'objet d'une attention particulière, cette approche considère le mélange eau-sédiment dans son ensemble, une équation de conservation de la quantité de mouvement pour la vitesse du mélange est résolue et l'intégration temporelle de l'équation de conservation de

la masse permet d'obtenir l'évolution de la concentration des sédiments. D'un point de vue numérique, ces modèles sont basés sur une résolution aux éléments finis des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement. La force d'interaction entre les phases est modélisée par l'intermédiaire d'une loi de type Darcy. Les contraintes visqueuses sont basées sur la formulation de *Anderson and Jackson* (1967) et une viscosité constante pour la phase solide est introduite. La turbulence n'est pas modélisée, le coefficient de diffusion verticale est imposé empiriquement. L'approche "bi espèce" a fourni des résultats encourageants pour la phase de chute des rejets de dragage, la phase de transport pose des difficultés qui sont probablement liées aux hypothèses de ce modèle. Notons que l'intérêt majeur de cette approche est de permettre une représentation aisée des mélanges sablo-vaseux sans modification des équations, par contre l'évolution de chaque phase ne peut être différenciée. Le modèle diphasique à deux fluides est encore à un stade préliminaire de développement.

Fu et al. (2005) présentent également une étude des effets de dispersion verticaux pour des particules fines et grossières dans le cas d'un écoulement turbulent en canal ouvert. Un modèle cinétique a été développé pour la phase solide et comparé à un ensemble de données expérimentales. La prédiction du profil de concentration est en bon accord avec l'expérience pour une large gamme de particules. Les effets de la force de portance et du gradient normal de contrainte turbulente pour la phase solide sont également analysés. Ces auteurs concluent qu'un modèle cinétique est bien adapté pour traiter ce type de problème, même pour des concentrations assez élevées ($< 5\%$). L'approche classique ne doit être appliquée qu'à des suspensions très diluées et pour des particules fines, sinon des erreurs importantes sont introduites.

D'après les résultats expérimentaux de *Muste et al.* (2005) les approches classiques traitant le mélange eau-particule ne sont pas consistantes avec la physique de l'écoulement. Une approche multiphasique à deux fluides est nécessaire pour simuler l'effet de la présence des particules sur l'écoulement fluide. Le développement d'une telle approche doit permettre d'améliorer la modélisation du transport de particules en suspension par l'approche classique notamment en déduisant des paramétrisations basées sur des fondements plus physiques des processus. Les mesures obtenues montrent clairement que les vitesses horizontales des deux phases, eau et particule, sont différentes lorsque l'inertie des particules est suffisante. De plus, la présence des particules influe sur l'écoulement du fluide même pour de très faibles concentrations volumiques, de l'ordre de 10^{-3} . Ces résultats serviront de base pour la comparaison avec les résultats du modèle numérique (Cf. III.3).

I.3.3 Le modèle diphasique 2D vertical à surface libre initial

Le travail présenté dans cette thèse est basé sur les travaux antérieurs de *Barbry* (2000); *Barbry et al.* (2000). Le modèle développé est bidimensionnel vertical à surface libre, il est basé sur la résolution des équations (Eq. I.23) et (Eq. I.24) pour chaque phase : c'est un modèle à deux fluides. Les effets d'inertie sur la verticale sont également considérés

(Guillou *et al.*, 2000), le modèle résoud la pression totale et intègre les effets de surpression liés à la présence des particules par un algorithme à pas fractionnaire. L'utilisation d'une technique de maillage eulérien adaptatif en coordonnée sigma (Phillips, 1957) permet une adaptation exacte du maillage à la surface libre où les conditions cinématiques et dynamiques sont imposées. Les détails concernant l'algorithme de résolution sont présentés en annexe (D).

a) Formulation mathématiques

i) Equations moyennes

Les équations moyennes de conservation de la masse et de la quantité de mouvement pour chaque phase s'écrivent :

$$\frac{\partial \alpha_k \rho_k}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\alpha_k \rho_k \vec{u}_k) = 0 \quad (I.23)$$

$$\frac{\partial \alpha_k \rho_k \vec{u}_k}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\alpha_k \rho_k \vec{u}_k \otimes \vec{u}_k) = \vec{\nabla} \cdot (\alpha_k (\bar{\bar{T}}_k^{Re} + \bar{\bar{T}}_k)) + \alpha_k \rho_k \vec{g} + \vec{M}_k \quad (I.24)$$

$\alpha_k, \vec{u}_k, \rho_k$ représentent respectivement la fraction volumique, le vecteur vitesse et la masse volumique de la phase k. \vec{g} est le vecteur accélération de la pesanteur. $\bar{\bar{T}}_k^{Re}$ représente le tenseur des contraintes de Reynolds et $\bar{\bar{T}}_k$ le tenseur des contraintes de frottement donné par l'équation (Eq. I.25). Le terme \vec{M}_k représente le transfert de quantité de mouvement entre les phases.

$$\bar{\bar{T}}_k = -p_k \bar{\bar{I}} + \bar{\bar{\tau}}_k \quad (I.25)$$

ii) Lois de fermeture

Le terme de transfert de quantité de mouvement entre les phases est évalué par la relation (Eq. I.26) (Drew and Lahey, 1993) en fonction de la pression et de la contrainte interfaciale p_{ki} et $\bar{\bar{\tau}}_{ki}$ et de \vec{M}'_k qui représente les différentes forces agissant sur la phase k dont la force de traînée.

$$\vec{M}_k = p_{ki} \vec{\nabla} \alpha_k - \bar{\bar{\tau}}_{ki} \cdot \vec{\nabla} \alpha_k + \vec{M}'_k \quad (I.26)$$

Nous particularisons ces équations par la suite en remplaçant l'indice k par f pour désigner les grandeurs associées à la phase fluide et par s pour désigner les grandeurs associées à la phase solide. Notons que la conservation de la masse globale impose la relation suivante :

$$\alpha_f + \alpha_s = 1 \quad (I.27)$$

Une fermeture proposée par Drew and Lahey (1993) consiste à considérer que la pression de la phase solide à l'interface est donnée par l'équation de Laplace ($p_{si} = p_{fi} + 4\sigma_p/d_p$)

en fonction de la tension de surface σ_p et de la pression interfaciale du fluide p_{fi} . Ce dernier terme est évalué en fonction des caractéristiques de l'écoulement par : $p_{fi} = p_f - \frac{1}{4}\rho_f \|\vec{u}_f - \vec{u}_s\|$.

Le tenseur de cisaillement de la phase k à l'interface entre les phases correspond à l'effet moyen du cisaillement local du fluide à la surface des particules. C'est un processus de sous-maille et il doit être modélisé. Nous avons adopté la proposition de [Drew and Lahey \(1993\)](#) : $\overline{\tau}_{si} = \overline{\tau}_{fi} = \beta \overline{\tau}_f$ où β représente le facteur d'amplification des contraintes visqueuses, celui-ci est modélisé par la formule (Eq. I.31). Notons que cette approximation est établie dans le cas d'un milieu dilué.

\overline{M}'_s est la somme des forces de traînée, de portance, de masse virtuelle, D'après le principe des actions réciproques : $\overline{M}'_f = -\overline{M}'_s$. En général pour l'étude du transport sédimentaire, seule la force de traînée est prise en compte :

$$\vec{F}_D = \frac{3}{4} \frac{\alpha_s \rho_f C_D}{d_p} \|\vec{u}_f - \vec{u}_s\| (\vec{u}_f - \vec{u}_s) \quad (\text{I.28})$$

Le coefficient de traînée (C_D) est fonction du nombre de Reynolds particulaire et de la fraction volumique de la phase particulaire α_s ([Enwald et al., 1996](#)).

$$C_D = \frac{24}{Re_p} (1 + 0.15 Re_p^{0.687}) \alpha_f^{-2.65}$$

Où $Re_p = \frac{\alpha_f d_p \|\vec{u}_f - \vec{u}_s\|}{\nu_f}$ désigne le nombre de Reynolds basé sur la vitesse relative et le diamètre des particules.

En ce qui concerne les lois constitutives, la solution couramment utilisée consiste à introduire un facteur d'amplification (β) pour la viscosité et de considérer les contraintes au sein du mélange eau-particule par l'intermédiaire de la relation :

$$\overline{\tau}_{mix} = 2\mu_f (1 + \alpha_s \beta) \overline{D}_f \quad (\text{I.29})$$

\overline{D}_k représente le tenseur des vitesses de déformation :

$$\overline{D}_k = \frac{1}{2} \left(\vec{\nabla} \vec{u}_k + \left(\vec{\nabla} \vec{u}_k \right)^T \right) \quad (\text{I.30})$$

Le paramètre β prend en compte l'interaction entre les particules. Il est fonction de la distance interparticulaire d_{ip} et du diamètre d des particules. La formulation retenue est celle proposée par [Graham \(1981\)](#).

$$\beta = \frac{5}{2} + \frac{9}{4} \left(1 + \frac{d_{ip}}{d} \right)^{-1} \left(\frac{1}{2d_{ip}/d} - \frac{1}{1 + 2d_{ip}/d} - \frac{1}{(1 + 2d_{ip}/d)^2} \right) \frac{1}{\alpha_s} \quad (\text{I.31})$$

[Drew and Lahey \(1993\)](#) préconisent l'utilisation de la formule : $\frac{d_{ip}}{d} = \frac{1 - (\alpha_s/\alpha_s^{max})^{1/3}}{(\alpha_s/\alpha_s^{max})^{1/3}}$

où α_s^{max} est la fraction volumique maximum de sphères contenues dans un cube. Cette valeur est déterminée expérimentalement et théoriquement à $\alpha_s^{max} = 0,625$ pour des sphères rigides.

Cette formulation pour la contrainte du mélange eau-particule (Eqs. I.29 et I.31) est asymptotiquement équivalente à la formulation proposée par [Einstein \(1906\)](#) dans le cas des milieux dilués : $\overline{\tau_{mix}} = 2\mu_f (1 + 2,5\alpha_s) \overline{D_f}$. Dans le cas des milieux denses, la viscosité diverge à la fraction volumique de solide maximale (α_s^{max}).

La loi constitutive introduite dans le modèle est obtenue à partir de la décomposition proposée par [Lundgren \(1972\)](#) en introduisant des viscosités effectives dépendant des fractions volumiques α_s et α_f :

$$\alpha_k \overline{\tau_k} = 2\mu_{ks} \overline{D_s} + 2\mu_{kf} \overline{D_f} - \mu_{k\nabla} \left[\vec{\nabla} \alpha_s \cdot (\vec{u_f} - \vec{u_s}) + (\vec{u_f} - \vec{u_s}) \cdot \vec{\nabla} \alpha_s \right] \quad (I.32)$$

$$\mu_{ff} = \alpha_f \mu_f \quad \mu_{fs} = \alpha_s \mu_f \quad \mu_{f\nabla} = -\mu_f \quad (I.33)$$

Afin d'estimer la valeur des viscosités effectives pour le tenseur des contraintes de la phase solide, on fait l'hypothèse que les particules solides se déplacent à la même vitesse que le fluide, *i.e.* $\vec{u_s} = \vec{u_f}$ et $\overline{D_s} = \overline{D_f}$. La sommation de l'équation (Eq. I.32) sur les deux phases fournit le tenseur des contraintes visqueuses pour le mélange des deux phases :

$$\overline{\tau_{mix}} = \alpha_s \overline{\tau_s} + \alpha_f \overline{\tau_f} = 2[\underbrace{\mu_{ss} + \mu_{sf} + \mu_{fs} + \mu_{ff}}_{=\mu_f}] \overline{D_f} \quad (I.34)$$

Supposons qu'il existe une fonction β telle que :

$$\mu_{ss} = \alpha_s \beta \mu_{fs} \quad \mu_{sf} = \alpha_s \beta \mu_{ff} \quad \mu_{s\nabla} = \alpha_s \beta \mu_{f\nabla} \quad (I.35)$$

En introduisant cette formulation dans l'équation (Eq. I.34), on retrouve l'équation (Eq. I.29) : $\overline{\tau_{mix}} = 2[\underbrace{(\alpha_s + \alpha_f)}_{=1} \alpha_s \beta \mu_f + \mu_f] \overline{D_f} = 2\mu_f (1 + \alpha_s \beta) \overline{D_f}$.

Finalement, la formulation pour les tenseurs des contraintes visqueuses des 2 phases s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \alpha_f \overline{\tau_f} &= \alpha_f 2\mu_f \overline{D_f} + \alpha_s 2\mu_f \overline{D_s} \\ \alpha_s \overline{\tau_s} &= \alpha_s \alpha_f \beta 2\mu_f \overline{D_f} + \alpha_s^2 \beta 2\mu_f \overline{D_s} \end{cases} \quad (I.36)$$

b) Maillage eulérien adaptatif

Un changement de coordonnées sigma est introduit afin de suivre avec précision l'évolution de la surface libre. Cette technique consiste à introduire une transformation des coordonnées physiques (x, z) en un système de coordonnées (x^*, σ) rectangulaires de hau-

leur unité fixe dans le temps (Fig. I.3). Les équations du modèle doivent être transformées comme décrit dans l'annexe D.

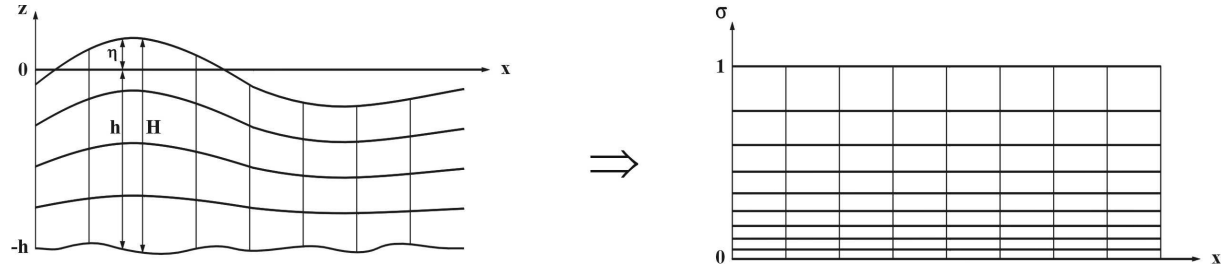


FIG. I.3 – Grilles de calcul dans les plans physique (Oxz) et de transformation ($Ox^*\sigma$)

c) Conditions aux limites

i) Condition au fond

Une condition d'adhérence est imposée sur la vitesse horizontale du mélange. Posons $\vec{u}_m = \alpha_f \vec{u}_f + \alpha_s \vec{u}_s$ la vitesse du mélange et u_m et w_m les composantes horizontale et verticale de cette vitesse. Cette condition s'écrit alors :

$$\begin{aligned} u_m|_{-h} &= 0 \\ w_m|_{-h} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{I.37})$$

Le gradient verticale de la partie non-hydrostatique de la pression au fond est imposé nul.

ii) Condition de surface libre

A la surface libre les conditions dynamique (Eq. I.38) et cinématique (Eq. I.39) sont imposées. La condition dynamique impose la continuité de la pression à travers la surface libre :

$$P_\eta = P_{atm} \quad (\text{I.38})$$

où P_η désigne la pression à la surface libre et P_{atm} la pression atmosphérique.

La condition cinématique de surface libre traduit qu'aucun flux de matière ne traverse cette surface.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u_m|_\eta \frac{\partial \eta}{\partial x} = w_m|_\eta \quad (\text{I.39})$$

Où $u_m|_\eta = \alpha_f u_f|_\eta + \alpha_s u_s|_\eta$ et $w_m|_\eta = \alpha_f w_f|_\eta + \alpha_s w_s|_\eta$ désignent respectivement les composantes horizontale et verticale de la vitesse du mélange à la surface libre.

La condition de surface libre est obtenue en combinant l'équation de conservation de la masse globale du mélange (Eq. D.6) intégrée sur la verticale à la condition cinématique de surface libre (Eq. I.39) (Cf. annexe D pour les détails).

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial Q_m}{\partial x} = 0 \quad (\text{I.40})$$

où $Q_m = \int_{-h}^{\eta} u_m dz$ désigne le débit volumique du mélange eau-particule.

d) Techniques de résolution numérique

Les équations du modèle sont discrétisées de manière implicite sur la verticale et explicite sur l'horizontale, une technique de projection de [Chorin \(1968\)](#) et [Temam \(1969\)](#) est utilisée pour le calcul de la vitesse de la phase fluide et de la pression. L'algorithme de résolution est présenté en annexe (Fig. D.4). L'élévation de surface libre est tout d'abord calculée à l'instant t^{n+1} à partir de l'équation (Eq. I.40) puis la fraction volumique est obtenue en résolvant l'équation de conservation de la masse (Eq. I.23) pour la phase solide. La fraction volumique de la phase fluide est alors calculée à partir de l'équation de conservation de la masse globale (Eq. I.27). Les grandeurs turbulentes sont calculées avant de résoudre les équations de conservation de la quantité de mouvement horizontale et verticale (Eq. I.24) pour la phase fluide à l'instant intermédiaire t^* à partir du champ de pression à l'itération précédente. Le champ de pression à l'instant t^{n+1} est déterminé à partir du champ de vitesse de la phase fluide calculé à l'instant intermédiaire t^* en résolvant une équation de poisson (Eq. D.11.d) sur la pression. Le champ de vitesse de la phase fluide à l'instant t^{n+1} peut alors être calculé à partir du gradient de pression à l'instant t^{n+1} est du champ de vitesse intermédiaire t^* par l'équation (Eq. D.11.c). Le champ de vitesse de la phase solide à l'instant t^{n+1} est enfin obtenu en résolvant les équations de conservation de la quantité de mouvement horizontale et verticale (Eq. I.24) pour la phase solide.

Un positionnement décalé et entrelacé des inconnues ([Harlow and Welch, 1965](#)) sur la grille de calcul (Cf. annexe Fig. D.2) est employé afin d'éviter les oscillations numériques qui risquent de se produire lors de l'utilisation d'une technique de projection ([Guillou, 1996](#); [Guillou and Nguyen, 1999](#)).

e) Conclusion & principaux résultats

Les travaux de [Barbry \(2000\)](#) ont abouti au développement du modèle diphasique 2D vertical à surface libre de transport sédimentaire. Un modèle hydrodynamique a été développé dans une première étape et il a été validé sur 3 cas-tests : l'écoulement de marée dans un canal à fond plat, la propagation d'un soliton dans un canal et l'écoulement sur une dune sous-marine. Ces cas-tests ont permis d'illustrer les capacités du modèle hydrodynamique mais l'auteur préconise une validation quantitative de ce dernier sur différentes configurations.

Le modèle diphasique a été appliqué à 5 cas-tests, le premier concerne le modèle de turbulence pour la phase fluide ($k_f - \varepsilon_f$). Deux autres cas-tests concernaient le transport en suspension et le transport par charriage. Ces deux tests très qualitatifs ont mis en évidence les perspectives de cette approche sans toutefois permettre une validation quantitative du modèle. Le problème de la simulation du phénomène de sédimentation en eau calme a été simulé dans le cas d'un sédiment cohésif, mais les effets d'entravement et le blocage de la suspension n'ont pu être obtenus numériquement. L'étude approfondie de ce processus fait partie des perspectives des travaux de [Barbry \(2000\)](#). Enfin, le courant engendré par la chute des particules dans une cuve (Fig. I.4) illustre tout l'intérêt de l'approche diphasique dans un cas où l'hypothèse hydrostatique n'est plus valable (Fig. I.5 et I.6)

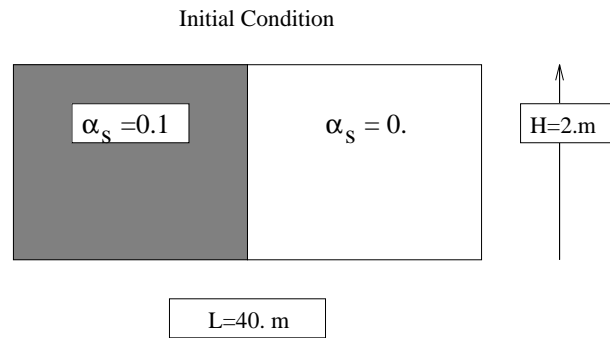


FIG. I.4 – Description du problème (d'après [Barbry \(2000\)](#)).

Les résultats bien qu'encourageants n'apparaissent pas *a posteriori* comme une validation quantitative du modèle. D'autre part un certain nombre de points restait en suspens, notamment la modélisation de la turbulence en particulier pour la phase solide et les effets d'entravement et de blocage de la suspension dans le processus de sédimentation.

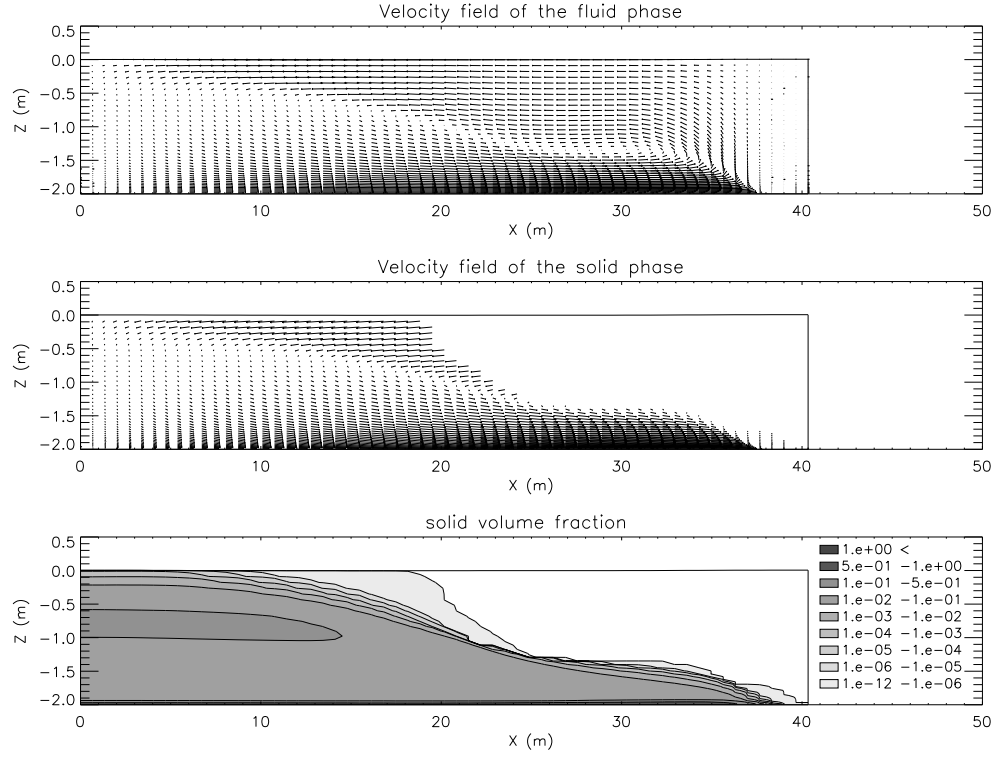


FIG. I.5 – Champ de vitesse de la phase fluide et de la phase solide. Isocontours de la fraction de volume de la phase solide à $t = 50s$ (d'après [Barbry \(2000\)](#)).

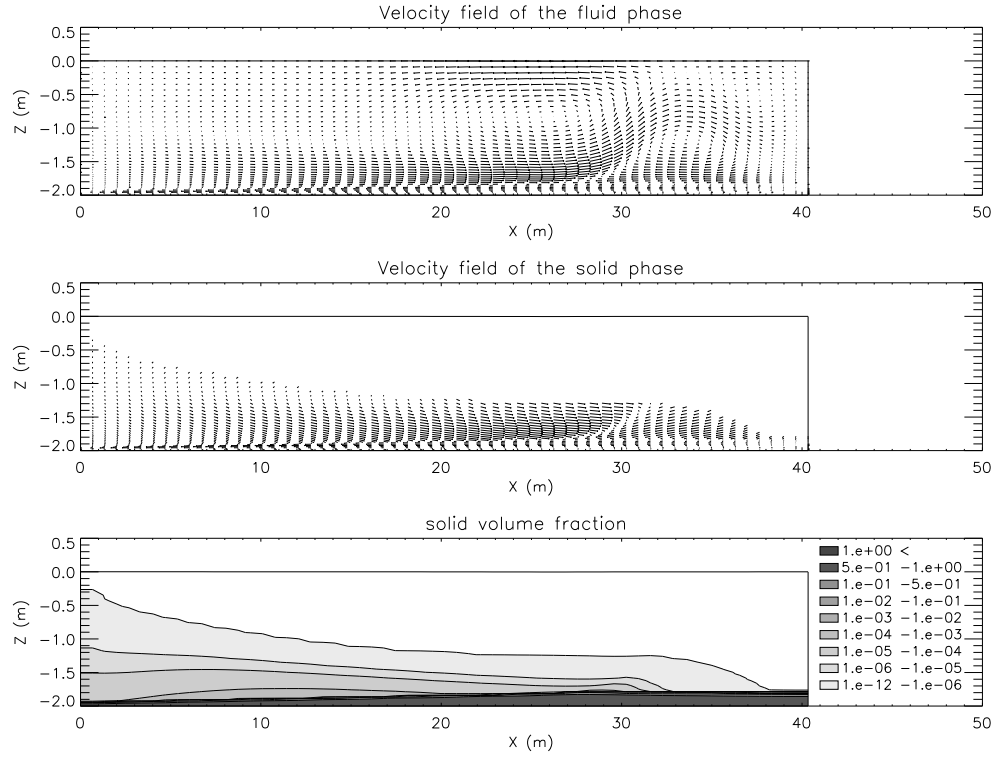


FIG. I.6 – Champ de vitesse de la phase fluide et de la phase solide. Isocontours de la fraction de volume de la phase solide à $t = 50s$ (d'après [Barbry \(2000\)](#)).

I.4 Objectifs de la thèse

L'objectif de ce travail est de tenter de répondre aux problèmes cités ci-dessus et plus généralement de mettre en évidence les capacités et les limites de l'approche diphasique développée pour modéliser le transport sédimentaire en milieux côtiers et estuariens.

Pour ce faire, nous effectuons une étude théorique sur la modélisation de la turbulence dans les milieux granulaires. Quatre approches de la modélisation de la turbulence sont proposées et implémentées dans le modèle précédemment décrit (Cf. [I.3.3](#)). Nous comparons les résultats du modèle diphasique avec des données expérimentales pour l'écoulement sur un obstacle, la sédimentation en eau calme et le transport en suspension de particules afin de valider les développements théoriques et numériques effectués au cours de ce travail. Nous déduisons de ces comparaisons les limites de la modélisation diphasique proposée. Enfin, nous présentons des résultats de simulation hydrosédimentaire dans l'estuaire de la Seine. Ceci constitue une première approche de simulation d'un estuaire avec un modèle à deux phases.

Chapitre II

Modélisation diphasique des écoulements fluide-particule

Dans ce chapitre nous présentons les équations fondamentales du modèle à deux fluides et la procédure permettant de les obtenir. Nous discutons ensuite de différentes formulations pour les lois de transfert, notamment le coefficient de traînée, dans le cadre du transport sédimentaire. La prise en compte des effets liés à la présence d'autres particules ainsi que l'effet de la forme et de l'état de surface des particules sur le coefficient de traînée sont discutés. Nous présentons enfin les aspects fondamentaux pour la modélisation de la turbulence dans les écoulements diphasiques fluide-solide et les effets de dispersion des particules au sein d'un écoulement turbulent. Nous déduisons trois approches pour la modélisation de la turbulence dans le modèle diphasique 2D vertical à surface libre de transport sédimentaire (Cf. [I.3.3](#)).

II.1 Equations fondamentales

Dans le cadre de l'application d'un modèle diphasique à des problèmes de transport sédimentaire en milieux côtiers et estuariens, l'emploi d'une approche Lagrangienne pour les sédiments est à proscrire du fait du nombre trop important de particules mises en jeu. L'approche Eulérienne pour les deux phases, l'eau et les sédiments, s'impose alors naturellement ([Barbry, 2000](#)).

Cette approche consiste à moyenner les équations locales instantanées de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie pour chaque phase. La présence d'interfaces entre les deux phases constitue la difficulté majeure de l'approche diphasique ([Ishii, 1975](#)). D'un point de vue mathématique, la présence de ces interfaces contredit les conditions de continuité utilisées pour l'établissement des équations-bilans de conservation. D'un point de vue physique, les difficultés pour établir les équations-bilans et les lois constitutives, proviennent de la présence des interfaces et du fait que les caractéristiques, stationnaires et dynamiques d'un écoulement multi-phasique dépendent de la structure même de l'écoulement.

Pour déterminer les interactions collectives entre les particules et la dynamique de

l'interface, il est nécessaire de décrire d'abord les propriétés locales de l'écoulement et ensuite d'obtenir une description macroscopique en appliquant une procédure de moyenne appropriée. Une formulation basée sur les variables locales instantanées rend, en général, le problème trop complexe d'un point de vue mathématique pour être résolu analytiquement. Les deux difficultés majeures sont les suivantes :

- existence d'une interface déformable dont les mouvements sont des inconnues du problème ;
- existence de fluctuation des variables due à la turbulence et aux mouvements des interfaces.

Le premier point est à l'origine de couplage complexe entre les phases et les conditions à l'interface, le second a pour effet d'introduire des caractéristiques statistiques liées à l'instabilité des équations de Navier-Stokes.

D'un point de vue pratique, les détails microscopiques du mouvement du fluide ou de toute autre variable sont rarement nécessaires et une description macroscopique de l'écoulement est plus importante. En utilisant une procédure de moyenne adaptée il est possible d'obtenir les valeurs moyennes du mouvement du fluide et ainsi d'éliminer les fluctuations locales instantanées des équations. D'une certaine manière la procédure de moyenne peut être vue comme un filtre "passe-bas" qui exclut les hautes fréquences des équations locales instantanées. Toutefois, les propriétés statistiques de ces fluctuations qui influencent les processus macroscopiques doivent être pris en compte dans une formulation moyennée.

II.1.1 Equations de conservation locale instantanée

Dans le cas d'un milieu continu unique, la forme générale de l'équation-bilan pour une quantité ψ est obtenue à partir du bilan sous forme intégrale auquel on applique successivement la loi de Leibniz, le théorème de Green et l'axiome de continuité ([Ishii, 1975](#)).

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \psi dv = - \oint_{\partial V} \bar{\bar{J}} \cdot \vec{n} d\Gamma + \int_V \rho \phi dv \quad (\text{II.1})$$

$\bar{\bar{J}}$ et ϕ représentent respectivement le flux moléculaire et le terme de source volumique de ψ .

Si les fonctions intervenant dans l'équation (Eq. [II.1](#)) sont suffisamment régulières pour que le jacobien de la transformation entre les coordonnées matérielles et spatiales soit défini, alors le théorème de transport de Reynolds peut être appliqué :

$$\frac{d}{dt} \int_V \bar{\bar{F}} dv = \int_V \frac{\partial \bar{\bar{F}}}{\partial t} dv + \oint_{\partial V} \bar{\bar{F}} \otimes \vec{u} \cdot \vec{n} d\Gamma \quad (\text{II.2})$$

\vec{u} représente la vitesse de la particule fluide.

En appliquant le théorème de Green (Eq. [II.3](#)) aux intégrales sur une surface fermée, l'équation générale de bilan pour la quantité ψ s'écrit sous la forme de l'équation (Eq.

II.4).

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \bar{\bar{F}} dv = \oint_{\partial V} \bar{\bar{F}} \cdot \vec{n} d\Gamma \quad (\text{II.3})$$

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho \psi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \psi \otimes \vec{u}) + \vec{\nabla} \cdot \bar{\bar{J}} - \rho \phi \right] dv = 0 \quad (\text{II.4})$$

$$\frac{\partial \rho \psi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \psi \otimes \vec{u}) + \vec{\nabla} \cdot \bar{\bar{J}} - \rho \phi = 0$$

Le premier terme de l'équation (Eq. II.4) correspond aux variations temporelles de ψ , le second terme à l'advection, le troisième terme aux flux surfaciques et le quatrième terme à la source volumique.

A l'interface entre les phases, les propriétés sont discontinues bien que la masse et la quantité de mouvement, notamment, doivent être conservées. Les conditions de saut valide à travers l'interface sont données par les relations suivantes :

$$[\rho(\vec{u} - \vec{u}_i) \cdot \vec{n}]_{kl} = 0 \quad (\text{II.5})$$

$$\left[\left(\rho \vec{u} \otimes (\vec{u} - \vec{u}_i) + \bar{\bar{T}} \right) \cdot \vec{n} \right]_{kl} = m_i^\sigma \quad (\text{II.6})$$

Où \vec{u}_i est la vitesse de l'interface, \vec{n} est le vecteur normal unitaire et $[\cdot]_{kl}$ représente le saut à travers l'interface entre les phases k et l. Ici, m_i^σ désigne la traction exercée à l'interface associée à la tension de surface.

Ces conditions de saut peuvent être regroupées sous la forme générique suivante :

$$\left[\left(\rho \psi \otimes (\vec{u} - \vec{u}_i) - \bar{\bar{J}} \right) \cdot \vec{n} \right]_{kl} = M_i \quad (\text{II.7})$$

A partir de ces équations il est possible d'écrire les différentes équations de conservation et leurs conditions de saut associées aux interfaces. Ainsi, la conservation de la masse est obtenue pour $\psi = 1$, $\bar{\bar{J}} = 0$, $\phi = 0$ et $M_i = 0$; et l'équation de conservation de la quantité de mouvement s'obtient avec : $\psi = \vec{u}$, $\bar{\bar{J}} = -\bar{\bar{T}} = p\bar{\bar{I}} - \bar{\bar{\tau}}$, $\phi = \vec{g}$ et $M_i = m_i^\sigma$.

II.1.2 Résultats préliminaires

Le processus utilisé pour obtenir les équations moyennes consiste à multiplier l'équation générale de bilan pour la quantité ψ (Eq. II.4) par X_k , la fonction indicatrice de la phase k (Eq. II.8), puis d'y appliquer un opérateur de moyenne d'ensemble, noté $\langle \cdot \rangle$.

a) Définition de la fonction indicatrice de phase

Tout d'abord il nous faut définir la fonction indicatrice de la phase k, celle-ci est égale à un si la phase k est présente et zéro sinon.

$$X_k = \begin{cases} 1 & \text{si la phase } k \text{ est présente ;} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{II.8})$$

La dérivée matérielle de la fonction indicatrice de phase en suivant l'interface est nulle :

$$\frac{\partial X_k}{\partial t} + \vec{u}_i \cdot \vec{\nabla} X_k = 0 \quad (\text{II.9})$$

En effet, si on se place en un point qui n'est pas sur l'interface alors $X_k = 1$ ou $X_k = 0$ (constant). Dans les deux cas l'équation (Eq. II.9) est vérifiée. Si on considère un point sur l'interface qui se déplace avec elle, la fonction X_k est vue comme un saut constant se déplaçant avec l'interface, donc sa dérivée matérielle est nulle.

Dans le cas d'un écoulement diphasique fluide-solide, où il n'y a pas d'échange de masse à l'interface on peut écrire que la vitesse normale de l'interface est égale à la vitesse normale du mélange : $\vec{u} \cdot \vec{n} = \vec{u}_i \cdot \vec{n}$. Ainsi l'équation (Eq. II.9) devient :

$$\frac{\partial X_k}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} X_k = 0 \quad (\text{II.10})$$

Cette relation est appelée équation topologique.

b) Définition de l'opérateur de moyenne d'ensemble

Nous allons fournir quelques précisions sur la moyenne d'ensemble ainsi que quelques propriétés vérifiées par celle-ci. La moyenne d'ensemble peut-être vue comme la moyenne sur un ensemble de réalisation d'un processus ([Drew and Lahey, 1993](#)). Une manière plus formelle de la représenter consiste à introduire la probabilité $dm(\mu)$ du processus μ . Notons ϵ l'ensemble des réalisations possibles de ce processus. Alors la moyenne d'une fonction f , dépendant de la position x et du temps t , pour une réalisation particulière μ s'écrit :

$$\langle f(x, t) \rangle = \int_{\epsilon} f(x, t; \mu) dm(\mu) \quad (\text{II.11})$$

Par linéarité de l'intégrale, cette moyenne vérifie évidemment les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle f_1 + f_2 \rangle = \langle f_1 \rangle + \langle f_2 \rangle \\ \langle \lambda f \rangle = \lambda \langle f \rangle \\ \langle \langle f \rangle \rangle = \langle f \rangle \\ \langle \langle f_1 \rangle \otimes f_2 \rangle = \langle f_1 \rangle \otimes \langle f_2 \rangle \end{array} \right. \quad (\text{II.12})$$

Par ailleurs, en supposant que la fonction f soit suffisamment régulière, la moyenne d'ensemble vérifie les deux propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \left\langle \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \langle f \rangle}{\partial t} \\ \left\langle \vec{\nabla} \cdot f \right\rangle = \vec{\nabla} \cdot \langle f \rangle \end{cases} \quad (\text{II.13})$$

A partir de cette moyenne une décomposition de Reynolds peut être définie :

$$\begin{aligned} f &= \langle f \rangle + f' \\ \langle f' \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.14})$$

où f' désigne la fluctuation de f au sens de la moyenne d'ensemble.

Nous aurons également besoin des deux résultats suivants :

$$\begin{aligned} \left\langle X_k \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial X_k f}{\partial t} \right\rangle - \left\langle f \frac{\partial X_k}{\partial t} \right\rangle \\ &= \frac{\partial \langle X_k f \rangle}{\partial t} - \left\langle f \frac{\partial X_k}{\partial t} \right\rangle \quad (a) \end{aligned} \quad (\text{II.15})$$

$$\begin{aligned} \left\langle X_k \vec{\nabla} \cdot f \right\rangle &= \left\langle \vec{\nabla} \cdot (X_k f) \right\rangle - \left\langle f \cdot \vec{\nabla} X_k \right\rangle \\ &= \vec{\nabla} \cdot \langle X_k f \rangle - \left\langle f \cdot \vec{\nabla} X_k \right\rangle \quad (b) \end{aligned}$$

Le second terme de ces équations correspond à la valeur moyenne de f sur l'interface évaluée sur la face de la phase k .

II.1.3 Obtention des équations moyennes

Nous allons expliciter la procédure proposée ci-avant pour obtenir les équations moyennes. Tout d'abord, multiplions l'équation (Eq. II.4) par X_k :

$$X_k \frac{\partial \rho \psi}{\partial t} + X_k \vec{\nabla} \cdot (\rho \psi \otimes \vec{u}) + X_k \vec{\nabla} \cdot \vec{J} - X_k \rho \phi = 0 \quad (\text{II.16})$$

En appliquant la moyenne d'ensemble à l'équation (Eq. II.16) et en utilisant la linéarité de la moyenne d'ensemble on obtient :

$$\left\langle X_k \frac{\partial \rho \psi}{\partial t} \right\rangle + \left\langle X_k \vec{\nabla} \cdot (\rho \psi \otimes \vec{u}) \right\rangle + \left\langle X_k \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \right\rangle - \langle X_k \rho \phi \rangle = 0 \quad (\text{II.17})$$

En utilisant les propriétés (Eq. II.15.a) et (Eq. II.15.b) on peut réécrire l'équation (Eq. II.17) sous la forme :

$$\frac{\partial \langle X_k \rho \psi \rangle}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\langle X_k \rho \psi \otimes \vec{u} \rangle) + \vec{\nabla} \cdot \langle X_k \bar{J} \rangle - \langle \rho \phi X_k \rangle = \left\langle \rho \psi \left(\frac{\partial X_k}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} X_k \right) \right\rangle + \langle \bar{J} \cdot \vec{\nabla} X_k \rangle \quad (\text{II.18})$$

D'après l'équation (Eq. II.10), le premier terme du second membre est nul, ainsi :

$$\frac{\partial \langle X_k \rho \psi \rangle}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\langle X_k \rho \psi \otimes \vec{u} \rangle) + \vec{\nabla} \cdot \langle X_k \bar{J} \rangle - \langle \rho \phi X_k \rangle = \langle \bar{J} \cdot \vec{\nabla} X_k \rangle \quad (\text{II.19})$$

Il apparaît donc que le terme $\langle \bar{J} \cdot \vec{\nabla} X_k \rangle$ représente le terme de source interfaciale de ψ et qu'il est dû au flux moléculaire \bar{J} sur l'interface.

Nous allons maintenant nous intéresser spécifiquement aux équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement moyennes. Afin de séparer les moyennes des produits, une moyenne de masse (Favre) est utilisée.

a) Définitions des variables moyennes

La moyenne de phase sera notée $\langle \cdot \rangle_{X_k}$ et la moyenne de Favre $\langle \cdot \rangle_{X_k \rho_k}$.

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \langle X_k \rangle & ; & \quad \langle \rho_k \rangle_{X_k} = \frac{\langle X_k \rho \rangle}{\langle X_k \rangle} & ; & \quad \langle \vec{u}_k \rangle_{X_k \rho_k} = \frac{\langle X_k \rho \vec{u}_k \rangle}{\langle X_k \rho_k \rangle} \\ \langle \bar{T}_k \rangle_{X_k} &= \frac{\langle X_k \bar{T} \rangle}{\langle X_k \rangle} & ; & \quad M_k = \langle \bar{T} \cdot \vec{\nabla} X_k \rangle \end{aligned} \quad (\text{II.20})$$

La décomposition de Reynolds de la vitesse est introduite dans les équations de conservation : $\vec{u} = \vec{u} + \vec{u}'$ où \vec{u} , \vec{u} et \vec{u}' représentent respectivement le vecteur vitesse instantanée, le vecteur vitesse moyen et le vecteur des fluctuations de vitesse.

b) Equations de conservation pour les variables moyennes

Introduisons cette décomposition de la vitesse dans les équations de conservation.

Equation de conservation de la masse moyenne

Tout d'abord, l'équation de conservation de la masse (Eq. II.19) avec $\psi = 1$ et $\bar{J} = \phi = 0$.

$$\frac{\partial \langle X_k \rho \rangle}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \langle X_k \rho (\vec{u} + \vec{u}') \rangle = 0 \quad (\text{II.21})$$

Le terme de fluctuation $\vec{\nabla} \cdot \langle X_k \rho \vec{u}' \rangle = \vec{\nabla} \cdot \left(\langle X_k \rho \rangle \langle \vec{u}' \rangle_{X_k \rho_k} \right)$ est nul.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle X_k \rangle \langle \rho_k \rangle_{X_k}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\langle X_k \rho \rangle \langle \vec{u}_k \rangle_{X_k \rho_k} \right) &= 0 \\ \frac{\partial \alpha_k \langle \rho_k \rangle_{X_k}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\alpha_k \langle \rho_k \rangle_{X_k} \langle \vec{u}_k \rangle_{X_k \rho_k} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.22})$$

Equation de conservation de la quantité de mouvement moyenne

La décomposition de Reynolds est introduite dans l'équation moyennée de conservation de la quantité de mouvement (Eq. II.19) avec $\psi = \vec{u}$, $\bar{J} = -\bar{T} = p\bar{I} - \bar{\tau}$, $\phi = \vec{g}$ et $M_i = m_i^\sigma$.

$$\frac{\partial \langle X_k \rho (\vec{u} + \vec{u}') \rangle}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \langle X_k \rho (\vec{u} + \vec{u}') \otimes (\vec{u} + \vec{u}') \rangle = \vec{\nabla} \cdot \langle X_k \bar{T} \rangle + \langle X_k \rho \vec{g} \rangle - \langle \bar{T} \cdot \vec{\nabla} X_k \rangle \quad (\text{II.23})$$

Le terme de fluctuation $\frac{\partial}{\partial t} \langle X_k \rho \vec{u}' \rangle = \frac{\partial}{\partial t} \left(\langle X_k \rho \rangle \langle \vec{u}' \rangle_{X_k \rho_k} \right)$ est nul. De même, les termes de la forme : $\vec{\nabla} \cdot \langle X_k \rho \vec{u} \otimes \vec{u}' \rangle = \vec{\nabla} \cdot \left(\langle X_k \rho \vec{u} \rangle \otimes \langle \vec{u}' \rangle_{X_k \rho_k} \right)$ sont nuls. Ainsi, l'équation (Eq. II.23) se simplifie :

$$\frac{\partial \langle X_k \rho \vec{u} \rangle}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \langle X_k \rho \vec{u} \otimes \vec{u} \rangle + \vec{\nabla} \cdot \langle X_k \rho \vec{u}' \otimes \vec{u}' \rangle = \vec{\nabla} \cdot \langle X_k \bar{T} \rangle + \langle X_k \rho \vec{g} \rangle - \langle \bar{T} \cdot \vec{\nabla} X_k \rangle \quad (\text{II.24})$$

En utilisant les propriétés et notations introduites précédemment (Eq. II.20), l'équation (Eq. II.24) s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle X_k \rho \rangle \langle \vec{u}_k \rangle_{X_k \rho_k}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\langle X_k \rho \rangle \langle \vec{u}_k \rangle_{X_k \rho_k} \otimes \langle \vec{u}_k \rangle_{X_k \rho_k} \right) + \vec{\nabla} \cdot \langle X_k \rho \vec{u}' \otimes \vec{u}' \rangle = \\ \vec{\nabla} \cdot \left(\langle X_k \rangle \langle \bar{T}_k \rangle_{X_k} \right) + \langle X_k \rho \rangle \langle \vec{g} \rangle_{X_k \rho_k} - \langle \bar{T} \cdot \vec{\nabla} X_k \rangle \end{aligned} \quad (\text{II.25})$$

Nous introduisons les notations suivantes :

- Le tenseur de Reynolds pour la phase k : $\bar{T}_k^{Re} = - \frac{\langle X_k \rho \vec{u}' \otimes \vec{u}' \rangle}{\alpha_k}$
- Le terme de transfert de la quantité de mouvement à l'interface pour la phase k : $\bar{M}_k = - \langle \bar{T} \cdot \vec{\nabla} X_k \rangle$

Le terme de transfert de quantité de mouvement entre les phases est évalué par la relation (Eq. II.26) (*Drew and Lahey, 1993*) en fonction de la pression et de la contrainte à l'interface p_{ki} et $\bar{\tau}_{ki}$ et de \bar{M}_k' qui représentent les différentes forces agissant sur la phase k (Cf. I.3.3).

$$\begin{aligned}
 \vec{M}_k &= -\langle \bar{\bar{T}} \cdot \vec{\nabla} X_k \rangle \\
 &= \langle p \vec{\nabla} X_k \rangle - \langle \bar{\bar{\tau}} \cdot \vec{\nabla} X_k \rangle \\
 &= p_{ki} \langle \vec{\nabla} X_k \rangle - \bar{\bar{\tau}}_{ki} \cdot \langle \vec{\nabla} X_k \rangle - \langle \bar{\bar{T}}'_{ki} \cdot \vec{\nabla} X_k \rangle \\
 \vec{M}_k &= p_{ki} \vec{\nabla} \alpha_k - \bar{\bar{\tau}}_{ki} \cdot \vec{\nabla} \alpha_k + \vec{M}'_k
 \end{aligned} \tag{II.26}$$

L'équation (Eq. II.25) devient :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \alpha_k \langle \rho_k \rangle_{X_k} \langle \vec{u}_k \rangle_{X_k \rho_k}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\alpha_k \langle \rho_k \rangle_{X_k} \langle \vec{u}_k \rangle_{X_k \rho_k} \otimes \langle \vec{u}_k \rangle_{X_k \rho_k} \right) &= \vec{\nabla} \cdot \left(\alpha_k \left(\langle \bar{\bar{T}}_k \rangle_{X_k} + \bar{\bar{T}}_k^{Re} \right) \right) \\
 + \alpha_k \langle \rho_k \rangle_{X_k} \langle \vec{g} \rangle_{X_k} - \vec{M}_k
 \end{aligned} \tag{II.27}$$

c) Bilan sur les équations de conservation pour les variables moyennes

Pour alléger les écritures, nous désignerons par $\langle \rangle_k$ la moyenne de phase ou la moyenne de Favre sans distinction.

Equation de conservation de la masse

$$\frac{\partial \alpha_k \langle \rho_k \rangle_k}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\alpha_k \langle \rho_k \rangle_k \langle \vec{u}_k \rangle_k) = 0 \tag{II.28}$$

Equation de conservation de la quantité de mouvement

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \alpha_k \langle \rho_k \rangle_k \langle \vec{u}_k \rangle_k}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\alpha_k \langle \rho_k \rangle_k \langle \vec{u}_k \rangle_k \otimes \langle \vec{u}_k \rangle_k) &= \vec{\nabla} \cdot \left(\alpha_k \left(\langle \bar{\bar{T}}_k \rangle_k + \bar{\bar{T}}_k^{Re} \right) \right) \\
 + \alpha_k \langle \rho_k \rangle_k \langle \vec{g} \rangle_k - \vec{M}_k
 \end{aligned} \tag{II.29}$$

Le traitement statistique des équations locales instantanées introduit des termes interfaciaux, des tenseurs de contrainte et des corrélations turbulentes qui doivent être modélisés ([Drew and Lahey, 1993](#); [Peirano and Leckner, 1998](#)). Nous allons nous concentrer sur les fermetures pour la force de traînée et la modélisation de la dispersion des particules sous l'effet de la turbulence, la modélisation des autres termes ayant déjà été abordée dans la thèse de [Barbry \(2000\)](#). Les lois de transfert décrivant les forces d'interaction entre les phases sont discutées dans la section suivante. Nous abordons ensuite la modélisation des corrélations turbulentes pour les phases fluide et solide et de la vitesse de dérive.

II.2 Loi de transfert

Les lois de transfert décrivent les forces d'interaction entre les phases, engendrées par les contraintes qui s'exercent sur l'interface entre celles-ci. Il s'agit de modéliser le terme de transfert de quantité de mouvement entre les phases \vec{M}_k (Eq. II.26), c'est le point crucial dans la modélisation diphasique.

Dans cette section nous étudions le terme \vec{M}_k' qui représente la somme des forces associées à la traînée, à la portance, aux effets de masse virtuels, aux effets visqueux instationnaires, etc.

$$\vec{M}_k' = \langle \vec{F}_D \rangle_s + \langle \vec{F}_L \rangle_s + \langle \vec{F}_{VM} \rangle_s + \dots \quad (\text{II.30})$$

Dans le cas de petites particules sédimentaires, comme les sables chutant sous l'effet de la gravité, le nombre de Reynolds particulaire Re_p est de l'ordre de l'unité (*Hsu et al.*, 2003) et la force de traînée est prépondérante. Souvent, seule cette force est prise en compte dans les modèles (*Drew*, 1976; *McTigue*, 1981; *Barbry*, 2000).

Pour des sables en présence d'un écoulement cisailé, la force de portance peut ne pas être négligeable. Nous présentons donc une modélisation de la force de portance due aux effets de cisaillement. Les effets de rotation des particules ne pouvant être considérées dans un modèle Eulérien, ceux-ci seront négligés. Nous présentons ensuite différentes formulations possibles pour la force de traînée prenant en considération l'influence de la concentration et de la forme des particules. Enfin, nous explicitons le terme de dispersion des particules dû aux fluctuations du terme de transfert de quantité de mouvement.

Dans le cadre du formalisme de la modélisation diphasique, le terme d'interaction \vec{M}_s' dans l'équation (Eq. II.26) correspond à la somme des forces appliquées aux particules par unité de volume (*Enwald et al.*, 1996). Pour une suspension de particules sphériques de diamètre moyen d_p , le terme d'interaction est relié à la force exercée sur une particule isolée par la relation :

$$\langle \vec{F} \rangle_s = n_p \vec{F} = \frac{\alpha_s}{V_p} \vec{F} = \frac{6\alpha_s}{\Pi d_p^3} \vec{F} \quad (\text{II.31})$$

où $\langle \vec{F} \rangle_s$ représente la force appliquée à l'ensemble des particules sur le volume d'intégration et \vec{F} désigne la force appliquée à une particule isolée.

II.2.1 Modélisation de la force de portance

Une particule en mouvement dans une couche cisailée est soumise à une force de portance positive ou négative, due à la différence de vitesse relative de part et d'autre de la particule et de la différence de pression engendrée par la non-uniformité de l'écoulement.

L'analyse de *Saffman* (1965, 1968) pour des faibles nombres de Reynolds a conduit à l'expression suivante :

$$\overrightarrow{F_{L,Saffman}} = 1,61\mu_f d_p (\overrightarrow{u_f} - \overrightarrow{u_s}) \sqrt{Re_s} \quad (\text{II.32})$$

Re_s désigne le nombre de Reynolds basé sur la vitesse de cisaillement :

$$Re_s = \frac{\rho_f d_p^2 \|\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{u_f}\|}{\mu_f}$$

[Mei \(1992\)](#) a proposé une correction de la formule de [Saffman \(1968\)](#) pour des nombres de Reynolds particuliers compris entre 0,1 et 100 en introduisant un facteur de correction f_L .

$$\overrightarrow{F_L} = \frac{\rho_f \pi d_p^2}{2} \frac{C_L}{4} d_p (\overrightarrow{u_f} - \overrightarrow{u_s}) \times (\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{u_f}) \quad (\text{II.33})$$

avec $C_L = 4,1126 Re_s^{-0,5} f_L(Re_p, Re_s)$ et $f_L(Re_p, Re_s) = \frac{F_L}{F_{L,Saffman}}$.

$$f_L(Re_p, Re_s) = \begin{cases} (1 - 0,3314\gamma^{1/2})e^{-Re_p/10} + 0,3314\gamma^{1/2} & \text{si } Re_p \leq 40 \\ 0,0524(\gamma Re_p)^{1/2} & \text{si } Re_p \geq 40 \end{cases} \quad (\text{II.34})$$

avec $\gamma = 0,5 \frac{Re_s}{Re_p}$. Notons que la force de portance augmente avec le diamètre des particules, celle-ci devient négligeable pour des particules de petites tailles.

L'expression de la force de portance appliquée à une suspension de particule est obtenue en multipliant la force de portance pour une particule seule par le nombre de particules par unité de volume par $\frac{\alpha_s}{V_p}$, ainsi :

$$\overrightarrow{F_L} = \alpha_s \rho_f \frac{3}{4} C_L \langle \overrightarrow{u_f} - \overrightarrow{u_s} \rangle_s \times \overrightarrow{\nabla} \times \langle \overrightarrow{u_f} \rangle_s \quad (\text{II.35})$$

[Drew and Lahey \(1993\)](#) proposent une formulation simplifiée en supposant que $\frac{3}{4}C_L = 0,5$. Le coefficient de portance proposé par [Mei \(1992\)](#) est certainement plus précis mais ne prend pas en considération les collisions avec la paroi ou la présence d'autres particules. Cette formulation est donc limitée au cas des écoulements faiblement chargés en particules.

II.2.2 Modélisation de la force de traînée

La force de traînée exercée sur une particule par le fluide environnant en régime stationnaire s'écrit sous la forme :

$$\overrightarrow{F_D} = \frac{1}{2} \rho_f C_D A \|\overrightarrow{u_f} - \overrightarrow{u_s}\| (\overrightarrow{u_f} - \overrightarrow{u_s}) \quad (\text{II.36})$$

C_D désigne le coefficient de traînée et A la surface représentative de la particule. Typiquement, cette surface correspond à la surface projetée de la particule dans la direction de la vitesse relative.

Pour une suspension de particule de diamètre moyen d_p le terme d'interaction est relié à la force de traînée pour une particule isolée par la relation :

$$\langle \vec{F}_D \rangle_s = \frac{3}{4} \frac{\alpha_s \rho_f}{d_p} C_D \parallel \langle \vec{u}_f - \vec{u}_s \rangle_s \parallel \langle \vec{u}_f - \vec{u}_s \rangle_s \quad (\text{II.37})$$

Nous discutons de la pertinence des différentes formulations du coefficient de traînée proposées dans la littérature dans le cadre de l'application à des particules mono-dimensionnées.

a) Les différents régimes d'écoulement

Régime de Stokes

Le régime de Stokes est caractérisé par un nombre de Reynolds local à la particule $Re_p < 1$. Dans ces conditions, les termes d'inertie dans les équations de Navier-Stokes sont négligeables et l'équation du mouvement du fluide autour de la particule se réduit à :

$$\vec{\nabla} p_f = \mu_f \Delta \vec{u}_f \quad (\text{II.38})$$

La résolution analytique de cette équation pour l'écoulement autour d'une sphère ([Stokes, 1851](#)) permet d'obtenir l'expression du champ de vitesse. En écrivant la force exercée par le gradient de pression et la contrainte de cisaillement sur la sphère, la force de traînée totale s'écrit :

$$\vec{F}_D = 3\Pi d_p \mu_f (\vec{u}_f - \vec{u}_s) \quad (\text{II.39})$$

En identifiant les équations (Eq. [II.39](#)) et (Eq. [II.36](#)) on déduit l'expression du coefficient de traînée :

$$C_D A = 6\Pi \frac{d_p \mu_f}{|\vec{u}_f - \vec{u}_s| \rho_f} \quad (\text{II.40})$$

Dans le cas d'une particule sphérique, la surface projetée de la particule (A) s'écrit simplement : $A = \Pi d_p^2/4$ et le coefficient de traînée :

$$C_D = \frac{24\nu_f}{d_p |\vec{u}_f - \vec{u}_s|} \quad (\text{II.41})$$

Cette formulation fait apparaître le nombre de Reynolds basé sur le diamètre de la particule et sa vitesse relative par rapport au fluide. On note ainsi : $Re_p = \frac{d_p |\vec{u}_f - \vec{u}_s|}{\nu_f}$ et l'équation précédente s'écrit simplement :

$$C_D = \frac{24}{Re_p} \quad (\text{II.42})$$

Dans le cas d'un écoulement non-uniforme la force de [Faxen \(1923\)](#) doit être considérée, ainsi l'équation (Eq.[II.39](#)) s'écrit ([Happel and Brenner, 1973](#)) :

$$\vec{F}_D = 3\Pi d_p \mu_f (\vec{u}_f - \vec{u}_s) + \mu_f \Pi \frac{d_p^3}{8} \Delta \vec{u}_f \quad (\text{II.43})$$

Le rapport des forces de Faxen et de Stokes est proportionnel au rapport d_p sur L au carré. L représentant une longueur caractéristique de l'écoulement du fluide autour de la particule. Pour des particules de petite taille la force de Faxen est négligeable.

$$\frac{F_{Faxen}}{F_{Stokes}} = \left(\frac{d_p}{L} \right)^2 \quad (\text{II.44})$$

Régime de transition

Lorsque le nombre de Reynolds associé à la particule (Re_p) augmente les termes d'inertie deviennent plus importants et le coefficient de traînée est supérieur à la valeur donnée par la formule de [Stokes \(1851\)](#). Différentes formulations ont été proposées dans la littérature pour représenter les effets d'inertie. [Oseen \(1910\)](#) a étendu l'analyse de [Stokes \(1851\)](#) en incluant les effets d'inertie au premier ordre. Il a conclu à la forme suivante du coefficient de traînée valable pour des nombres de Reynolds inférieurs à 5.

$$C_D = \frac{Re_p}{24} \left(1 + \frac{3}{16} Re_p \right) \quad (\text{II.45})$$

Nous introduisons le facteur de traînée f défini comme le rapport du coefficient de traînée sur le coefficient de traînée de [Stokes \(1851\)](#).

$$f = \frac{C_D Re_p}{24} \quad (\text{II.46})$$

$$f = 1 + \frac{3}{16} Re_p \quad (\text{II.47})$$

Une autre formulation proposée par [Schiller and Naumann \(1933\)](#) fournit une estimation raisonnable du coefficient de traînée pour des nombres de Reynolds inférieurs à 800 :

$$f = 1 + 0,15 Re_p^{0,687} \quad (\text{II.48})$$

Régime de Newton

Lorsque le nombre de Reynolds particulaire augmente (~ 100), des tourbillons apparaissent dans le sillage de la sphère. Ces derniers ont pour effet de diminuer la pression dans le sillage, augmentant ainsi la traînée de forme. La contribution due au cisaillement diminue donc avec l'augmentation du nombre de Reynolds. Ainsi le coefficient de traînée admet une valeur constante à 0,45. Ce régime est qualifié de régime de Newton.

[Clift and Gauvin \(1970\)](#) ont proposé une correction de la formulation de [Schiller and Naumann \(1933\)](#) valable pour des nombres de Reynolds particuliers supérieurs à 1000.

$$f = 1 + 0,15Re_p^{0,687} + 0,0175Re_p(1 + 4,2510^4Re_p^{-1,16})^{-1} \quad (\text{II.49})$$

Régime critique

A un nombre de Reynolds critique de l'ordre de $3 \cdot 10^5$ la couche limite de l'écoulement fluide autour de la particule devient turbulente et engendre une réduction importante de la traînée. Ce régime n'est jamais atteint dans le cadre du transport sédimentaire et ne sera donc pas discuté par la suite.

Dans le cas du transport sédimentaire le nombre de Reynolds varie entre 10^{-6} pour des argiles et $4 \cdot 10^2$ pour des sables grossiers. Seul les deux premiers régimes d'écoulement sont significatifs. Les différentes formulations présentées ci-dessus sont représentées sur la figure (Fig. II.1).

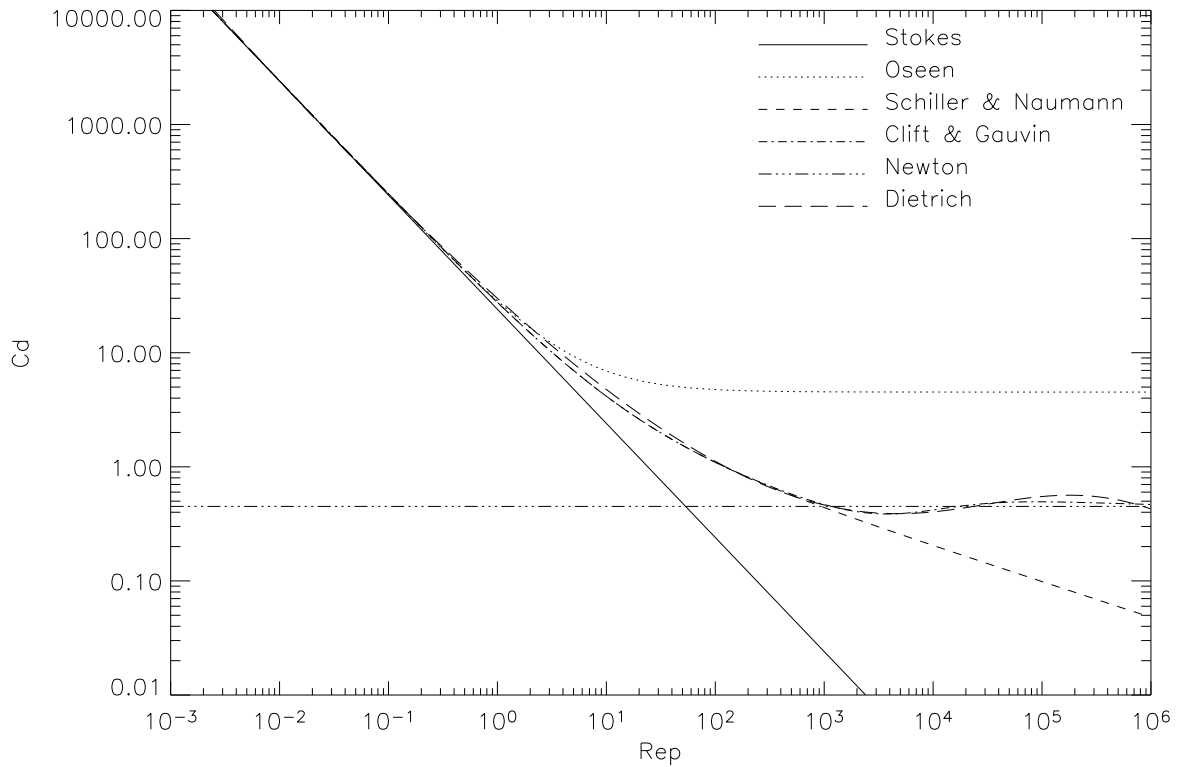


FIG. II.1 – Evolution du coefficient de traînée en fonction du nombre de Reynolds local à la particule (Re_p)

Dietrich (1982) propose une formule empirique synthétisant de nombreuses données expérimentales pour la vitesse de chute de particules naturelles. La comparaison avec cette formule montre que l'expression proposée par *Clift and Gauvin* (1970) est la plus proche de la formule empirique proposée par *Dietrich* (1982). Comme nous le verrons par la suite *Dietrich* (1982) propose également des corrections pour prendre en compte la forme des particules.

b) Influence de la concentration de particules

Pour représenter l'influence de la présence d'autres particules sur la force de traînée dans un nuage de particules, différents auteurs ont proposé une correction de la force de traînée pour une particule seule. Une approche consiste à introduire une fonction $g(\alpha_f) = \alpha_f^{-\theta}$ qui intègre la modification de la traînée liée à la présence des particules dans le nuage et à calibrer l'exposant sur des données expérimentales. [Wen and Yu \(1966\)](#) ont utilisé la formule proposée par [Schiller and Naumann \(1933\)](#) pour corrélérer leurs données expérimentales, ils ont proposé la valeur de 3,7 pour θ . Plus récemment, [Di Felice \(1994\)](#) a proposé une corrélation dépendant du nombre de Reynolds pour l'exposant θ (Eq. II.50) dont l'évolution en fonction du nombre de Reynolds local à la particule est représentée sur la figure (Fig. II.2).

$$\theta = 3.7 - 0.65 \exp\left(-\frac{(1.5 - \log_{10}(Re_p))^2}{2}\right) \quad (\text{II.50})$$

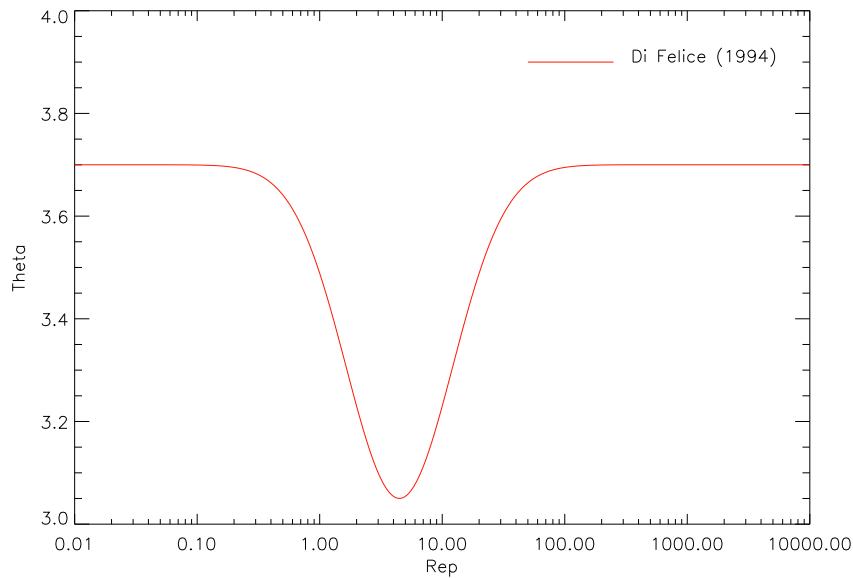


FIG. II.2 – Evolution de l'exposant θ en fonction du nombre de Reynolds local à la particule (d'après [Di Felice \(1994\)](#))

Une autre approche proposée par [Ishii and Zuber \(1979\)](#) consiste à exprimer le nombre de Reynolds local à partir de la viscosité du mélange (Eq. II.51).

$$Re_p = \frac{d_p \|\langle \vec{u}_f - \vec{u}_s \rangle\|_s}{\nu_{mix}} \quad (\text{II.51})$$

Ce choix est motivé par le fait que la présence d'autres particules engendre pour chaque particule une augmentation de la résistance à son mouvement qui peut être liée à l'augmentation de la viscosité du milieu. Dans le code de calcul nous avons choisi d'utiliser cette formulation pour prendre en compte les effets de concentration sur la traînée.

c) Influence de la forme des particules

Afin de représenter la forme des particules [Wadell \(1933\)](#) a proposé d'introduire un facteur de forme Ψ correspondant, pour une particule de volume V , au rapport de l'aire des surfaces de la sphère de volume équivalent (A_S) et de l'aire de la surface de la particule réelle (A).

$$\Psi = \frac{A_S}{A} \quad (\text{II.52})$$

On déduit facilement les caractéristiques suivantes :

$$A_S = \frac{\Pi}{4}(D_S)^2 \quad ; \quad V = \frac{\Pi}{6}(D_S)^3 \quad (\text{II.53})$$

Le coefficient de traînée pour la particule non-sphérique est alors obtenu en écrivant l'égalité suivante :

$$C_D A = \frac{1}{K^2} (C_D A)_s \quad (\text{II.54})$$

où K^2 dépend du facteur de forme de la particule et du nombre de Reynolds particulaire Re_p *a priori*.

Plus récemment, [Ro and Neethling \(1990\)](#) ont étendu la formulation proposée par [Schiller and Naumann \(1933\)](#) pour prendre en compte la sphéricité (S_F) et l'état de surface des particules (Υ) :

$$C_D = \frac{24\Upsilon}{Re_p} + a S_F^2 Re_p^b \quad (\text{II.55})$$

a et b sont des coefficients empiriques à préciser. La sphéricité est définie comme le rapport du diamètre de la surface projetée équivalente (D_{AP}) et du diamètre de la particule sphérique équivalente (D_S).

$$S_F = \frac{D_{AP}}{D_S} \quad (\text{II.56})$$

L'état de surface Υ est défini comme le rapport du diamètre de la particule de surface équivalente (D_A) et du diamètre de la particule sphérique équivalente (D_S).

$$\Upsilon = \frac{D_A}{D_S} \quad (\text{II.57})$$

Le nombre de Reynolds local à la particule est basé sur le diamètre de la particule sphérique de volume équivalent. [Schiller and Naumann \(1933\)](#) ont proposé les valeurs de $a = 3,6$ et $b = -0,313$ valables pour des nombres de Reynolds particuliers compris entre 10^{-3} et 10^3 . [Ro and Neethling \(1990\)](#) ont proposé, pour des particules rugueuses et déformables et des nombres de Reynolds particuliers compris entre 15 et 87 les valeurs de $a = 21,55$ et $b = -0,518$.

Une expression valable pour des nombres de Reynolds particuliers inférieurs à $25 \cdot 10^3$

et une sphéricité (Ψ) supérieure à 0,026 a été proposée par [Haider and Levenspiel \(1989\)](#), cette expression est dérivée de la formule de [Clift and Gauvin \(1970\)](#) :

$$C_D = \frac{24}{Re_p} \left[1 + e^{2,3288-6,4581\Psi+2,4486\Psi^2} Re_p^{0,0964+0,5565\Psi} \right] + \frac{Re_p e^{4,905-13,8944\Psi+18,4222\Psi^2-10,2599\Psi^3}}{Re_p + e^{1,4681+12,2584\Psi-20,7322\Psi^2+15,8855\Psi^3}} \quad (II.58)$$

La comparaison de ces formules avec la loi empirique de [Dietrich \(1982\)](#) pour des particules naturelles nous montre (Fig II.3) que cette dernière formulation est la plus adaptée. Nous utilisons donc la formule de [Haider and Levenspiel \(1989\)](#) pour le coefficient de traînée dans le modèle diphasique. Notons également que la valeur de $\Psi = 0.6$ correspond à la courbe la plus proche de la formule de [Dietrich \(1982\)](#).

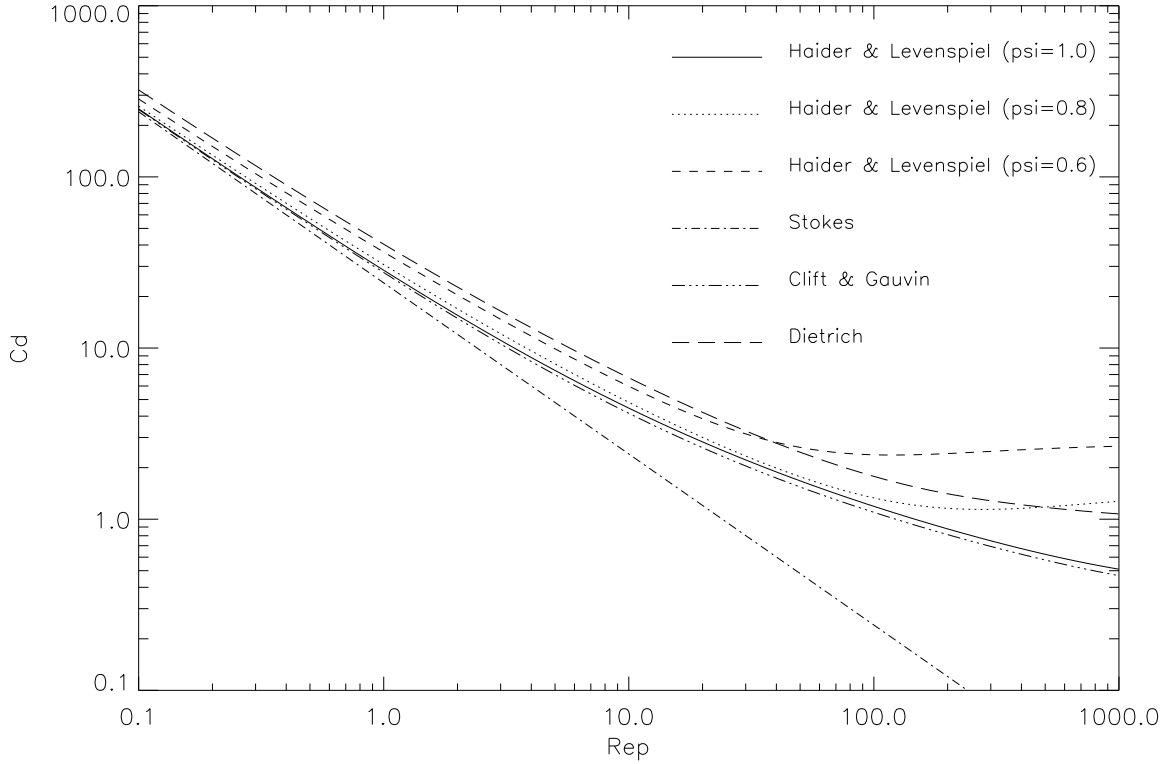


FIG. II.3 – Compilation de l'évolution du coefficient de traînée en fonction du nombre de Reynolds local pour des particules non sphériques - $\Psi = 1 ; 0,8$ et $0,6$

Remarque :

Nous avons utilisé les valeurs proposées par [Dietrich \(1982\)](#) pour des particules naturelles type sable. Ce qui correspond à une valeur du facteur de forme de Corey de 0,6 et une valeur de la sphéricité de 3,5.

II.2.3 Modélisation des effets de dispersion des particules

Une attention particulière doit être portée lors de la procédure de moyenne pour prendre en compte les effets de dispersion dus aux fluctuations du terme de transfert de quantité de mouvement (*Simonin and Viollet, 1990*). $\vec{u}_f - \vec{u}_s$ représente la vitesse relative instantanée définie en chaque point où une particule est présente. \vec{u}_s désigne la vitesse instantanée de translation d'une particule. \vec{u}_f est définie comme la vitesse instantanée du fluide environnant, localement non perturbé par la présence des particules. Celle-ci peut-être obtenue par une moyenne spatiale sur un volume dont les dimensions sont grandes par rapport au diamètre des particules. Cette hypothèse revient à considérer que la moyenne spatiale de l'écoulement du fluide perturbée par la présence des particules peut être négligée. Le champ de vitesse non perturbé \vec{u}_f reste turbulent et vérifie les propriétés suivantes : $\vec{u}_f = \langle \vec{u}_f \rangle_f + \vec{u}'_f$ avec $\langle \vec{u}'_f \rangle_f = 0$

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}_s - \vec{u}_f \rangle_s &= \langle \vec{u}_s \rangle_s - \langle \vec{u}_f \rangle_s \\ &= \langle \vec{u}_s \rangle_s - \left\langle \langle \vec{u}_f \rangle_f + \vec{u}'_f \right\rangle_s \\ \langle \vec{u}_s - \vec{u}_f \rangle_s &= \langle \vec{u}_s \rangle_s - \langle \vec{u}_f \rangle_f - \left\langle \vec{u}'_f \right\rangle_s \end{aligned}$$

Le terme $\vec{u}_d = \left\langle \vec{u}'_f \right\rangle_s$ appelé vitesse turbulente de dérive représente la corrélation entre les fluctuations de vitesse de la phase fluide et la distribution spatiale instantanée des particules. Ce terme correspond à la dispersion des particules par les mouvements fluctuants de grande échelle de la phase fluide, grande échelle par rapport au diamètre des particules (*Simonin and Viollet, 1990*). Un modèle pour la vitesse de dérive a été proposé par *Deutsch and Simonin (1991)*, il s'exprime sous la forme :

$$\vec{u}_d = \overline{\overline{D_{fs}^t}} \left(\frac{\vec{\nabla} \alpha_f}{\alpha_f} - \frac{\vec{\nabla} \alpha_s}{\alpha_s} \right) \quad (\text{II.59})$$

Le tenseur de dispersion $\overline{\overline{D_{fs}^t}}$ est exprimé en fonction de la covariance entre les fluctuations de vitesse des deux phases $\left(\left\langle \vec{u}'_f \otimes \vec{u}'_s \right\rangle_s \right)$ et d'un temps caractéristique de l'interaction turbulente fluide-particule (τ_{fs}^t) dans le cadre de la théorie de *Tchen (1947)* :

$$\overline{\overline{D_{fs}^t}} = \tau_{fs}^t \left\langle \vec{u}'_f \otimes \vec{u}'_s \right\rangle_s \quad (\text{II.60})$$

Les détails concernant cette modélisation seront donnés dans la section II.3.3.

Par la suite, nous exprimerons la force de traînée en fonction du temps de relaxation des particules τ_{fs} (Eq. II.62) et de la vitesse relative \vec{u}_r (Eq. II.63) par la relation suivante :

$$\vec{M}'_s = -\vec{M}'_f = \frac{\alpha_s \rho_s}{\tau_{fs}} \vec{u}_r \quad (\text{II.61})$$

$$\tau_{fs} = \frac{4d_p \rho_s}{3\rho_f C_D \|\vec{u}_r\|} \quad (\text{II.62})$$

Nous définissons la vitesse relative par la relation :

$$\vec{u}_r = \langle \vec{u}_s \rangle_s - \langle \vec{u}_f \rangle_f - \vec{u}_d \quad (\text{II.63})$$

II.3 Modélisation de la turbulence pour la phase solide

Pour les écoulements monophasiques, la turbulence est associée à l'apparition de vortex chaotiques à différentes échelles spatio-temporelles. Pour les écoulements diphasiques la turbulence est moins bien établie. La turbulence dans la phase fluide est similaire à celle en écoulement monophasique, bien que les mécanismes de génération et de dissipation puissent différer, influencés par la présence des particules. La turbulence dans la phase particulaire peut être physiquement expliquée par les fluctuations de vitesse des particules engendrées par les collisions et les interactions avec la phase fluide.

Peirano and Leckner (1998) ont proposé une revue des aspects fondamentaux pour la modélisation de la turbulence dans les écoulements diphasiques gaz-solide et plus spécialement appliquée aux lits fluidisés. Il existe principalement quatre approches possibles, les modèles du premier ordre de type $k - \epsilon$, les modèles du second ordre tels que les modèles aux tensions de Reynolds (RSM) et les modèles à fermeture algébrique des contraintes de Reynolds (ASM). Une autre approche consiste à simuler la turbulence, ce sont les Simulations Numériques Directes (SND / DNS) et les Simulations des Grandes Échelles (SGE / LES). La SND consiste à simuler directement toutes les échelles de turbulence, les corrélations des fluctuations sont alors obtenues directement à partir d'un traitement statistique des séries temporelles issues du modèle. Pour atteindre les plus petites échelles, l'échelle de dissipation visqueuse, le maillage doit être très fin et cette approche nécessite donc des temps de calcul conséquents et ne peut être envisagée que sur des configurations très simples et pour des nombres de Reynolds assez faibles. La SGE consiste à simuler directement les grandes échelles de turbulence et à modéliser les structures turbulentes dont la taille est inférieure à la dimension caractéristique du maillage. Les temps de calcul sont plus raisonnables et cette approche ouvre de grandes perspectives pour la simulation de la turbulence.

Dans cette étude, du fait des dimensions du domaine physique que l'on souhaite modéliser (estuaire) et de la complexité engendrée par l'aspect diphasique du modèle, nous considérons que le modèle de Boussinesq est valable pour modéliser les tenseurs des corrélations de vitesse. Nous utiliserons donc un modèle du premier ordre de type $k - \epsilon$.

II.3.1 Classification des écoulements gaz-solide

Dans la formulation des équations de transport quelques échelles de temps caractéristiques sont définies. Ces échelles de temps sont fondamentales dans la classification et la compréhension des mécanismes dominant dans les suspensions. L'échelle de temps caractéristique des grands tourbillons au sein de la phase fluide (τ_f^t) est définie par la relation (Eq. II.64.a), en accord avec le modèle $k - \epsilon$ classique. Le temps caractéristique du mouvement turbulent de la phase fluide vue par les particules (τ_{fs}^t), est principalement affecté par la perte de corrélation entre les mouvements fluctuants dus aux mouvements relatifs moyens

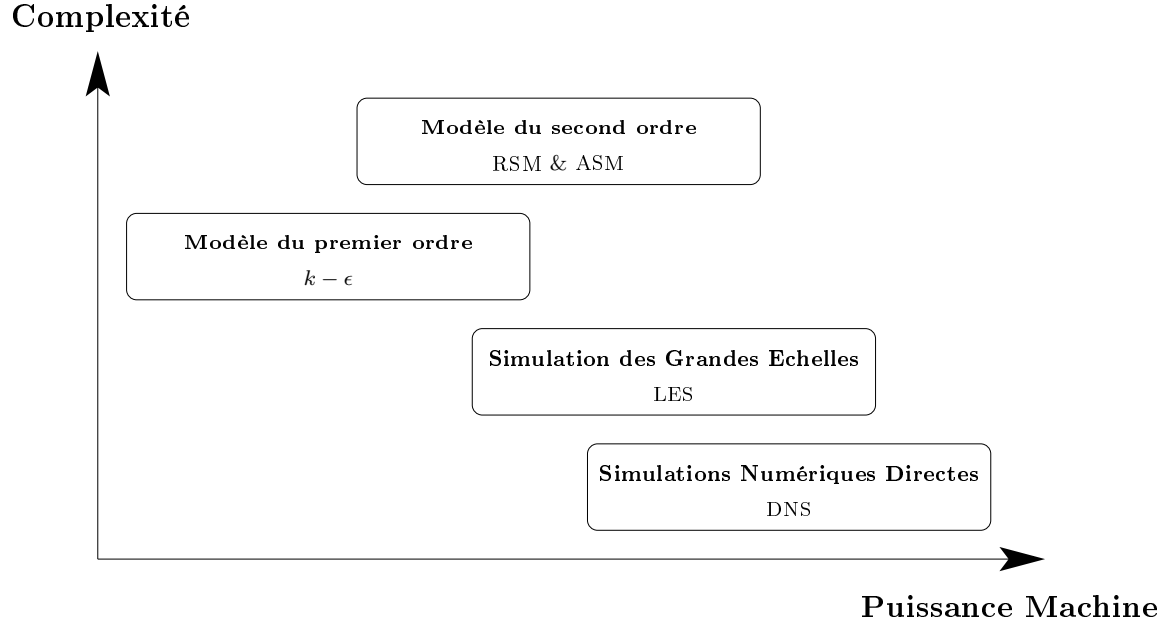


FIG. II.4 – Classification des différentes approches pour la modélisation de la turbulence

des particules (crossing-trajectories effects). Suivant la proposition de [Csanady \(1963\)](#), il peut s'écrire sous la forme donnée par l'équation (Eq. II.64.b). La constante C_β dépend de l'écoulement et de la direction de celui-ci. Pratiquement, ce temps caractéristique exprime le fait que le temps passé par une particule de fluide virtuelle dans un tourbillon est différent de celui passé par une particule solide du fait de la vitesse relative qui existe entre les deux phases. Le temps de relaxation d'une particule solide (τ_{fs}) est donné par la relation (Eq. II.64.c) et il représente l'entraînement des particules par l'écoulement du fluide. Le coefficient de traînée moyen pour une particule (C_D) est fonction du nombre de Reynolds particulaire. La vitesse relative fait intervenir la vitesse de dérive qui est discutée ci-après (Cf. a)). Dans le cadre de la théorie cinétique des milieux granulaires, le temps caractéristique des collisions particule-particule (τ_s^c) est donné par la relation (Eq. II.64.d) et il représente le temps écoulé entre deux collisions binaires successives pour deux particules données. g_0 est appelé fonction de distribution radiale et il traduit l'augmentation de la probabilité des collisions avec l'augmentation de la concentration.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \tau_f^t = \frac{3}{2} C_\mu k_f / \epsilon_f & (a) \\ \tau_{fs}^t = \tau_f^t [1 + C_\beta \cdot (3 \|\vec{u}_r\|^2) / (2k_f)]^{-1/2} & (b) \\ \tau_{fs} = \frac{4d_p \rho_s}{3\rho_f C_D \|\vec{u}_r\|} & (c) \\ \tau_s^c = (d_p / (24g_0 \alpha_s)) \sqrt{(3\pi) / (2k_s)} & (d) \end{array} \right. \quad (II.64)$$

[Elgobashi \(1991\)](#) a proposé une classification des écoulements gaz-solide, basée sur les échelles de temps caractéristiques définies précédemment, mais aussi sur la distance interparticulaire $(x_1 - x_2)/d_p$, et l'échelle de temps de Kolmogorov τ_K (Fig. II.5).

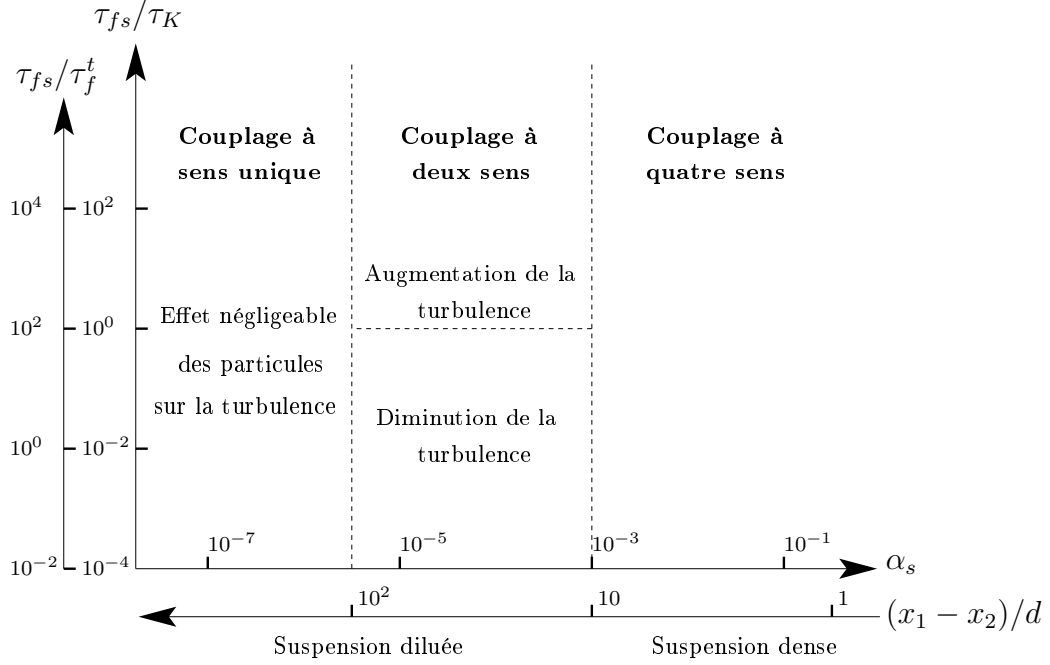


FIG. II.5 – Classification des régimes d'écoulement gaz-solide selon [Elgobashi \(1991\)](#)

Lorsque la suspension est très diluée ($\alpha_s < 10^{-6}$) les particules n'ont aucun effet sur la turbulence de la phase fluide mais leur mouvement peut être gouverné par le mouvement turbulent du fluide, si leur inertie est suffisamment faible : c'est ce que l'on appelle le couplage à sens unique ("one-way coupling"). Quand la fraction volumique est plus élevée ($\alpha_s \approx 10^{-3}$) les effets dus à la présence des particules sur le mouvement turbulent du fluide sont observés : c'est ce que l'on appelle le couplage à deux sens ("two-way coupling").

La turbulence peut être modifiée de deux façons, soit elle est amplifiée, soit elle est amortie. Pour une fraction volumique donnée la turbulence est amplifiée si le temps de relaxation des particules augmente (ce qui signifie que le diamètre moyen des particules augmente). Il est communément admis que lorsque le nombre de Reynolds particulaire dépasse une certaine valeur critique, des tourbillons apparaissent localement dans le sillage des particules, qui ont pour effet d'augmenter l'énergie cinétique turbulente du fluide. *A contrario*, si le temps de relaxation diminue, il n'y a pas de tourbillons engendrés et l'énergie est dissipée par le travail fourni par les tourbillons pour accélérer les particules. Le mécanisme de création de tourbillons - travail fourni par les tourbillons aux particules, est supposé être le mécanisme prépondérant dans les écoulements gaz-solide.

En général, cinq mécanismes peuvent être responsables de la modulation de la turbulence :

1. la dissipation d'énergie cinétique turbulente par les particules ;
2. l'augmentation de la viscosité turbulente due à la présence des particules ;
3. l'apparition de tourbillons dans le sillage des particules ;
4. le mouvements du fluide avec les particules impliquant une masse ajoutée aux particules ;
5. l'augmentation du gradient de vitesse entre deux particules.

Ces mécanismes ne sont certainement pas indépendants et les mécanismes 2 et 5 doivent être moins importants dans les écoulements très dilués.

Pour des fractions volumiques supérieures à 10^{-3} , la distance interparticulaire est suffisamment petite pour que des collisions se produisent. Ce régime est qualifié de couplage à quatre sens ("four-way coupling").

Une classification systématique des écoulements gaz-solide, qui ne tient pas compte de la modulation de la turbulence, peut être établie en fonction des temps caractéristiques définis précédemment.

Quand $\tau_{fs} << \tau_{fs}^t$ le mouvement des particules est régi par la turbulence de la phase fluide. Dans le cas contraire, les particules sont peu affectées par la turbulence de la phase fluide. Ces deux comportements asymptotiques sont appelés le cas limite scalaire (scalar limit) et le cas des particules grossières (coarse particle).

Lorsque $\tau_s^c << \tau_{fs}$ le mouvement des particules est régi par les collisions tandis que si $\tau_{fs} << \tau_s^c$ les particules sont surtout affectées par la turbulence de la phase fluide. Ce sont respectivement les cas denses et dilués.

Quand la vitesse relative moyenne entre les phases est nulle, i.e. les particules ne chutent pas, on peut montrer que $\tau_{fs}^t \approx \tau_f^t$. Alors que pour une vitesse relative moyenne non nulle $\tau_{fs}^t < \tau_f^t$.

II.3.2 La théorie cinétique des écoulements granulaires

Il existe une analogie forte entre les mouvements aléatoires d'un milieu granulaire et celui d'un fluide. La différence fondamentale réside dans l'origine des processus de dissipation de l'énergie au sein de ces milieux. Dans le cas d'un milieu granulaire ce sont les contacts entre les particules qui sont responsables de la dissipation, pour un fluide la dissipation est d'origine visqueuse. Les lois de conservation pour un milieu granulaire sont donc similaires à celles de l'hydrodynamique excepté pour la conservation de l'énergie qui tient compte de la nature dissipative des contacts.

Les modèles de turbulence pour la phase solide dérivent en général de la théorie cinétique des écoulements granulaires. Cette théorie est basée sur l'analogie entre les matériaux granulaires, une population de particules et les molécules d'un gaz.

L'un des travaux les plus complets sur la théorie cinétique des écoulements granulaires est dû à *Jenkins and Richman (1985)*. Leurs résultats sont obtenus à partir de la théorie cinétique des gaz denses combinés avec la théorie de *Grad (1949)*.

a) Equation de Maxwell-Boltzmann

Considérons un ensemble de particules identiques de diamètre d_p et de masse volumique ρ_s . Ces particules sont soumises à une force extérieure \vec{F} . Une particule est repérée par sa position \vec{x} et sa vitesse \vec{c} , à un instant t , dans un repère Galiléen $\mathcal{R} (\mathcal{O}, \vec{e}_i)$. Les grandeurs moyennes sont déterminées à partir de la fonction densité de probabilité de vitesse d'une particule (f^1) qui représente le nombre de particules, par unité de volume, situées dans l'intervalle $[\vec{x}, \vec{x} + d\vec{x}]$ à l'instant t et ayant une vitesse appartenant à $[\vec{c}, \vec{c} + d\vec{c}]$. En intégrant f^1 par rapport à \vec{c} on définit la densité volumique de particules n_p :

$$n_p = \int f^1(\vec{x}, \vec{c}, t) d\vec{c} \quad (\text{II.65})$$

Soit une fonction $\psi(\vec{c})$ donnée, la moyenne de cette fonction est alors définie par :

$$\langle \psi(\vec{c}) \rangle_s = \frac{1}{n_p} \int \psi(\vec{c}) f^1(\vec{x}, \vec{c}, t) d\vec{c} \quad (\text{II.66})$$

En choisissant $\psi(\vec{c}) = \vec{c}$ on obtient la vitesse moyenne de la particule. La composante fluctuante de la vitesse de la particule est alors définie par : $\vec{C} = \vec{c} - \langle \vec{c} \rangle_s$. Et en choisissant $\psi(\vec{c}) = 1/2c^2$ on obtient la température granulaire T_s . Dans la suite nous utiliserons la notation $\vec{U}_s = \langle \vec{c} \rangle_s$ pour désigner la vitesse moyenne d'une particule. La température granulaire peut-être reliée à l'énergie cinétique de la phase solide par la relation : $T_s = 2/3k_s$

Une équation de conservation du nombre de sphères dans un volume élémentaire peut être formulée en fonction de $f^1(\vec{x}, \vec{c}, t)$ (Eq. II.67) :

$$\frac{\partial f^1}{\partial t} + \frac{\partial c_i f^1}{\partial x_i} + \frac{\partial F_i f^1}{\partial c_i} = \frac{\partial f^1}{\partial t} |_{coll} \quad (\text{II.67})$$

où $F_i = g_i - \frac{c_i - u_{f,i}}{\tau_{fs}} - \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial p_f}{\partial x_i}$ correspond aux forces extérieures appliquées à une sphère par unité de masse et $\frac{\partial f^1}{\partial t} |_{coll}$ désigne le taux de variation de la fonction de distribution f^1 dû aux collisions binaires entre particules.

En multipliant l'équation (Eq. II.67) par $\psi(\vec{c})$ et en intégrant sur tout le domaine de vitesse, on obtient une équation de transport pour $\langle \psi(\vec{c}) \rangle_s$ (*Chapman and Cowling, 1970*) :

$$\frac{\partial n_p \langle \psi \rangle_s}{\partial t} + \frac{\partial n_p \langle \psi c_i \rangle_s}{\partial x_i} - n_p \left(\left\langle \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\rangle_s + \left\langle c_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right\rangle_s + \left\langle F_i \frac{\partial \psi}{\partial c_i} \right\rangle_s \right) = \int \psi \frac{\partial f^1}{\partial t} |_{coll} d\vec{c} \quad (\text{II.68})$$

Dans cette équation le second terme du membre de gauche représente les variations de $\langle \psi \rangle_s$ liées aux flux de particules qui entrent ou sortent du volume élémentaire $d\vec{x}$. Le second terme du membre de gauche correspond à la variation de $\langle \psi \rangle_s$ au sein du volume

élémentaire \vec{dx} sous l'action des forces extérieures. Enfin, le membre de droite désigne l'accroissement de $\langle \psi \rangle_s$ dû aux collisions dans le volume élémentaire \vec{dx} .

D'un point de vue théorique, deux termes doivent être modélisés, la fonction densité de probabilité de vitesse d'une particule (f^1) et le taux de variation d'une grandeur ψ dû aux collisions binaires.

b) Taux de variation dû aux collisions

Le terme $\int \psi \frac{\partial f^1}{\partial t} |_{coll} \vec{dc}$ dans l'équation (Eq. II.68) représente l'intégrale, sur toute les collisions possibles, des modifications de ψ dus aux collisions binaires multipliées par la probabilité d'une telle collision. Une fonction de distribution des paires $f^2(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{c}_1, \vec{c}_2, t)$ est introduite, elle représente la densité de probabilité de trouver deux particules 1 et 2 centrées en \vec{x}_1 et \vec{x}_2 avec des vitesses \vec{c}_1 et \vec{c}_2 . Pour qu'une collision soit possible, il faut que la particule 1 soit située dans un cylindre élémentaire de volume $d_p(\vec{c}_r \cdot \vec{k}) dk dt$ où $\vec{c}_r = \vec{c}_1 - \vec{c}_2$ et $d_p \vec{k} = \vec{x} - \vec{x}_1$. D'après *Chapman and Cowling* (1970), le nombre de collisions possibles par unité de temps s'exprime :

$$f^2(\vec{x} - d_p \vec{k}, \vec{x}, \vec{c}_1, \vec{c}_2, t) d_p^2(\vec{c}_r \cdot \vec{k}) \vec{dk} \vec{dc}_1 \vec{dc}_2 \quad (\text{II.69})$$

Le taux de variation d'une propriété ψ_2 due aux collisions pour la particule 2 qui est changée en ψ'_2 pour la particule 2 s'écrit alors :

$$\int \psi_2 \frac{\partial f^1}{\partial t} |_{coll} \vec{dc} = \int (\psi'_2 - \psi_2) f^2(\vec{x} - d_p \vec{k}, \vec{x}, \vec{c}_1, \vec{c}_2, t) d_p^2(\vec{c}_r \cdot \vec{k}) \vec{dk} \vec{dc}_1 \vec{dc}_2 \quad (\text{II.70})$$

Par symétrie des collisions, en changeant \vec{k} en $-\vec{k}$, le taux de variation d'une propriété ψ_1 due aux collisions pour la particule 1 s'écrit alors :

$$\int \psi_1 \frac{\partial f^1}{\partial t} |_{coll} dc = \int (\psi'_1 - \psi_1) f^2(\vec{x} + d_p \vec{k}, \vec{x}, \vec{c}_1, \vec{c}_2, t) d_p^2(\vec{c}_r \cdot \vec{k}) \vec{dk} \vec{dc}_1 \vec{dc}_2 \quad (\text{II.71})$$

D'après *Jenkins and Richman* (1985) une expression plus symétrique est obtenue en considérant que le taux de variation d'une propriété ψ due aux collisions est égale à la moitié de la somme des équations (Eq. II.70) et (Eq. II.71). En utilisant un développement de Taylor sur f^2 (*Jenkins and Richman*, 1985) obtiennent le taux de variation sous la forme suivante :

$$\int \psi \frac{\partial f^1}{\partial t} |_{coll} dc = \chi(\psi) - \frac{\partial \theta_i(\psi)}{\partial x_i} - \frac{\partial U_{s,i}}{\partial x_i} \theta_i \left(\frac{\partial \psi}{\partial C_j} \right) \quad (\text{II.72})$$

$$\chi(\psi) = \int_{\vec{c}_r \cdot \vec{k} > 0} \Delta \psi f^2(x_1, x_2, c_1, c_2, t) d_p^2(\vec{c}_r \cdot \vec{k}) dk dc_1 dc_2 \quad (\text{II.73})$$

$$\Delta\psi = (\psi'_1 + \psi'_2) - (\psi_1 + \psi_2) \quad (\text{II.74})$$

$$\theta_i(\psi) = \int_{\vec{c}_r \cdot \vec{k} > 0} (\psi'_1 - \psi_1) k_i \left(1 - \frac{d_p}{2!} k_j \frac{\partial}{\partial x_j} + o(d_p^2) \right) f^2(x_1, x_2, c_1, c_2, t) d_p^2(\vec{c}_r \cdot \vec{k}) dk dc_1 dc_2 \quad (\text{II.75})$$

Le terme $\chi(\psi)$ représente la perte de la propriété ψ due aux collisions inélastiques et le terme de flux $\theta_i(\psi)$ représente le transport de la propriété ψ pendant la collision.

Pour calculer ces intégrales (Eq. II.73 et Eq. II.75) la fonction de distribution des paires f^2 , $\Delta\psi$ et $\psi'_1 - \psi_1$ doivent être obtenues.

c) Collisions binaires

Considérons une collision inélastique entre deux particules lisses identiques 1 et 2, de masse m et de diamètre d_p . Si J est la force exercée par la particule 1 sur la particule 2, la conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$mc_1 = mc'_1 - J ; mc_2 = mc'_2 + J \quad (\text{II.76})$$

Il est supposé que la vitesse relative normale au plan de contact satisfasse la relation :

$$\vec{c}'_r \cdot \vec{k} = -e(\vec{c}_r \cdot \vec{k}) \quad (\text{II.77})$$

e désigne le coefficient de restitution qui représente la perte d'énergie durant la collision. Sa valeur est comprise entre 0 et 1. Si $e = 1$, la collision est élastique et il n'y a pas d'énergie perdue pendant la collision. Sinon la collision est inélastique et de l'énergie est dissipée pendant la collision.

En combinant les équations (Eq. II.76) et (Eq. II.77) la force exercée par la particule 1 sur la particule 2 au moment de la collision s'écrit :

$$J_i = \frac{1}{2}m(1+e)(c_{r,j}k_j)k_i \quad (\text{II.78})$$

Les expressions pour la variation des moments d'ordre un et deux des vitesses peuvent être exprimées à partir des relations (Eq. II.76) à (Eq. II.78). On définit : $\delta(c_{1,i}) = c'_{1,i} - c_{1,i}$ et $\delta(c_{1,i}c_{1,j}) = c'_{1,i}c'_{1,j} - c_{1,i}c_{1,j}$.

Donc

$$\delta(c_{1,i}) = -J_i$$

et

$$\delta(c_{1,i}c_{1,j}) = \frac{1}{2}(1+e)(c_{r,m}k_m) \left(\frac{1}{2}(1+e)(c_{r,m}k_m)k_i k_j - (c_{1,j}k_i + c_{1,i}k_j) \right)$$

Les expressions des variations des moments pour la particule 2 sont obtenues de la même manière. Le changement total des moments d'ordre un et deux de vitesses est défini par : $\Delta(c_i) = \delta(c_{1,i}) + \delta(c_{2,i})$ et $\Delta(c_i c_j) = \delta(c_{1,i}c_{1,j}) + \delta(c_{2,i}c_{2,j})$.

Ainsi, $\Delta(c_i) = 0$ et $\Delta(c_i c_j) = \frac{1}{2}(1+e)(c_{r,m} k_m)((1+e)(c_{r,m} k_m) k_i k_j - (c_{r,j} k_i + c_{r,i} k_j))$

d) Equations de conservation et de transport

Finalement, les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement et les équations de transport des corrélations du second ordre pour la phase solide sont établies à partir de l'équation (Eq. II.68).

L'équation de conservation de la masse est obtenue à partir de l'équation (Eq. II.68) pour $\psi = m$. Remarquons que $\alpha_s \rho_s = n_p m$.

$$\frac{\partial \alpha_s \rho_s}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_s \rho_s U_{s,j}}{\partial x_j} = 0 \quad (\text{II.79})$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement est obtenue à partir de l'équation (Eq. II.68) pour $\psi = m \vec{c}$.

$$\frac{\partial \alpha_s \rho_s U_{s,i}}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_s \rho_s U_{s,j} U_{s,i}}{\partial x_j} = -\alpha_s \frac{\partial P_f}{\partial x_i} - \frac{\partial \Sigma_{s,ij}}{\partial x_j} + \frac{\alpha_s \rho_s}{\tau_{fs}} U_{r,i} + \alpha_s \rho_s g_i \quad (\text{II.80})$$

$\Sigma_{s,ij} = \theta_{ij} + \alpha_s \rho_s \Lambda_{s,ij}$ est le tenseur des contraintes effectives, θ_{ij} représente la contribution des collisions et $\Lambda_{s,ij}$ les corrélations du second ordre des fluctuations de vitesse. Les fluctuations de pression ont été négligées, cette hypothèse a été vérifiée par [Bel Fdhila and Simonin \(1992\)](#) pour les écoulements gaz-solide mais reste à démontrer pour les écoulements liquide-solide. En l'absence d'information sur ce sujet dans la littérature nous supposons que cette hypothèse est valide dans le cas des écoulements liquide-particule. Remarque :

Les équations de conservation de la masse (Eq. II.79) et de la quantité de mouvement pour la phase solide (Eq. II.80) obtenues dans le cadre de la théorie cinétique sont rigoureusement identiques à celles obtenues par la méthode de moyenne pondérée par la distribution de phase (Eq. II.28 et Eq. II.29) présentée dans la section II.1.3.

L'équation de transport des corrélations du second ordre est obtenue à partir de l'équation (Eq. II.68) multipliée par la masse d'une particule et pour $\psi = C_i C_j$.

$$\frac{\partial \alpha_s \rho_s \Lambda_{s,ij}}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_s \rho_s U_{s,m} \Lambda_{s,ij}}{\partial x_m} = -\frac{\partial E_{ijm}}{\partial x_m} - \Sigma_{s,im} \frac{\partial U_{s,j}}{\partial x_m} - \Sigma_{s,jm} \frac{\partial U_{s,i}}{\partial x_m} - \frac{2\alpha_s \rho_s}{\tau_{fs}} (\Lambda_{s,ij} - \Lambda_{fs,ij}) + \chi_{ij} \quad (\text{II.81})$$

Où $E_{ijm} = \theta_{ijm} + \alpha_s \rho_s \Lambda_{s,ijm}$. Le tenseur du troisième ordre est défini par $\Lambda_{s,ijm} = \langle C_i C_j C_m \rangle_s$ et le tenseur des corrélations des vitesses fluide-particule est donné par $\Lambda_{fs,ij} = \frac{1}{2} \langle u''_{f,i} C_j + u''_{f,j} C_i \rangle_s$ et $u''_{f,i} = u_{f,i} - \langle u_{f,i} \rangle_s$ représente les fluctuations de vitesse de la phase fluide vue par la phase solide.

Le premier terme du second membre de l'équation (Eq. II.81) représente le transport des contraintes par les fluctuations de vitesse et par les collisions. Le second et le troisième terme correspondent à la production de contrainte par le gradient de vitesse du mouvement moyen. Le quatrième terme peut être séparé en deux contributions, la première

$-\frac{2\alpha_s\rho_s}{\tau_{fs}}\Lambda_{s,ij}$ représente la dissipation due à la force de traînée, la seconde $\frac{2\alpha_s\rho_s}{\tau_{fs}}\Lambda_{fs,ij}$ représente la production due à l'interaction avec la turbulence de la phase fluide. Enfin le dernier terme de l'équation (Eq. II.81) représente l'interaction due aux collisions.

Une équation de transport pour l'énergie cinétique turbulente pour la phase solide k_s est obtenue en prenant la trace de l'équation (Eq. II.81), c'est-à-dire en imposant $i=j$.

$$\frac{\partial\alpha_s\rho_s k_s}{\partial t} + \frac{\partial\alpha_s\rho_s U_{s,i}k_s}{\partial x_i} = -\frac{1}{2}\frac{\partial E_{mmi}}{\partial x_i} - \Sigma_{s,im}\frac{\partial U_{s,m}}{\partial x_i} - \frac{\alpha_s\rho_s}{\tau_{fs}}(k_s - \Lambda_{fs,mm}) + \chi_{mm} \quad (\text{II.82})$$

Comme pour l'équation de transport des corrélations du second ordre, le premier terme du second membre représente le transport de l'énergie cinétique turbulente de la phase solide k_s par les fluctuations de vitesse et par les collisions. Le second terme correspond à la production d'énergie cinétique turbulente de la phase solide k_s par le gradient de vitesse du mouvement moyen. Le troisième terme représente l'interaction avec la phase fluide (production ou dissipation). Enfin le dernier terme de l'équation (Eq. II.82) représente la perte d'énergie due aux collisions.

En procédant de la même manière, *Peirano and Leckner* (1998) obtiennent une expression pour les corrélations du troisième ordre $\langle C_i C_j C_m \rangle_s$.

L'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente de la phase solide (Eq. II.82) fait intervenir le tenseur des corrélations de fluctuation de vitesse du second ordre, le tenseur des contraintes collisionnelles, le tenseur des corrélations des fluctuations de vitesse fluide-particule ainsi que le taux de dissipation d'énergie dû aux collisions qui doivent être déterminées.

e) Théorie de Grad (1949)

Ecrivons la fonction densité de probabilité de vitesse d'une particule sous la forme d'une série de polynômes d'Hermite, $H_i^{(n)}(\vec{c})$:

$$f^1(\vec{x}, \vec{c}, t) = f^0(\vec{x}, \vec{c}, t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a_i^n(\vec{x}, t) H_i^{(n)}(\vec{c}) \quad (\text{II.83})$$

Où $a_i^n(\vec{x}, t)$ désigne des tenseurs symétriques sur tous leurs indices et les polynômes d'Hermite peuvent être exprimés en terme de la fonction de distribution de Maxwell, $f^0(\vec{x}, \vec{c}, t)$:

$$f^0(\vec{x}, \vec{c}, t) = \frac{n}{(2\pi T_s)^{3/2}} e^{-C^2/(2T_s)} \quad (\text{II.84})$$

$$H_{i\dots k}^{(n)}(f) = (-1)^n \frac{1}{f} \frac{d^n f}{dc_i \dots dc_k} \quad (\text{II.85})$$

T_s désigne la température granulaire par analogie avec la théorie cinétique des gaz. Celle-ci est proportionnelle à l'énergie cinétique de la turbulence de la phase solide k_s :

$$3T_s = 2k_s.$$

La théorie de [Grad \(1949\)](#) consiste à faire un développement au troisième ordre de l'équation (Eq. II.83), ce qui est une hypothèse raisonnable si l'écoulement ne varie pas trop rapidement. On suppose que le gaz ou le milieu granulaire est suffisamment proche de l'état d'équilibre (état Maxwellien). La fonction densité de probabilité de vitesse d'une particule peut alors s'écrire :

$$f^1 = f^0 \left(H^0 + a_i H_i^1 + \frac{1}{2!} a_{ij} H_{ij}^{(2)} + \frac{1}{3!} a_{ijm} H_{ijm}^{(3)} \right) \quad (\text{II.86})$$

Les polynômes d'Hermite s'écrivent alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} H^0 = 1 \\ H_i^1 = \frac{1}{f^0} \frac{\partial f^0}{\partial c_i} = -\frac{C_i}{T_s} \\ H_{ij}^2 = \frac{1}{f^0} \frac{\partial^2 f^0}{\partial c_i \partial c_j} = -\frac{\delta_{ij}}{T_s} + \frac{C_i C_j}{T_s^2} \\ H_{ijm}^3 = \frac{1}{f^0} \frac{\partial^3 f^0}{\partial c_i \partial c_j \partial c_m} = \frac{C_i \delta_{jm} + C_j \delta_{im} + C_m \delta_{ij}}{T_s^2} - \frac{C_i C_j C_m}{T_s^3} \end{array} \right. \quad (\text{II.87})$$

Avec les équations (Eq. II.66) et (Eq. II.86), les moments des vitesses et les coefficients du développement en série, a_i , a_{ij} et a_{ijm} peuvent être mis en relation ([Peirano and Leckner, 1998](#)). Théoriquement, avec l'approximation à l'ordre 3, 20 inconnues (α_s , $U_{s,i}$, T_s , a_i , a_{ij} et a_{ijm}) doivent être déterminées par 20 équations de transport. Les termes a_{ijj} ont une interprétation physique, ils sont directement reliés à la densité de flux d'énergie. Grad propose donc de simplifier ce système à 20 inconnues en un système à 13 inconnues en faisant une contraction du tenseur du troisième ordre :

$$a_{ijm} = \frac{1}{5} (a_{inn} \delta_{jm} + a_{jnn} \delta_{im} + a_{mnn} \delta_{ij}) + \iota_{ijm} \quad \text{avec} \quad \iota_{ijm} = 0 \quad (\text{II.88})$$

Cette décomposition est similaire à celle d'un tenseur d'ordre 2 en un tenseur déviatorique et un tenseur isotropique. Des relations obtenues entre les moments des vitesses et les coefficients du développement en série de polynômes d'Hermite (a_i , a_{ij} , a_{ijk}) et de la forme contractée (Eq. II.88) pour a_{ijk} des équations de transport sont ainsi obtenues pour a_{ij} et a_{imm} . Celles-ci sont très proches de celles des moments d'ordre 2 et 3 des vitesses.

f) Théorie linéaire (Jenkins and Richman, 1985)

Le taux de variation d'une grandeur ψ dû aux collisions binaires est obtenu en introduisant la fonction de distribution des paires f^2 (Eq. II.89), produit des fonctions densité de probabilité de vitesse pour deux particules distinctes susceptibles de réaliser une collision binaire et d'une fonction radiale de distribution g_0 . Celle-ci traduit l'augmentation

des collisions binaires avec la concentration de particules.

$$f^2((\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{c}_1, \vec{c}_2, t) = g_0(x) f^1(\vec{x} - \frac{d_p \vec{k}}{2}, \vec{c}_1, t) f^1(\vec{x} + \frac{d_p \vec{k}}{2}, \vec{c}_2, t) \quad (\text{II.89})$$

L'approche proposée par [Jenkins and Richman \(1985\)](#) consiste à effectuer un développement en série de Taylor de la fonction densité de probabilité de vitesse d'une particule puis à appliquer la théorie de [Grad \(1949\)](#).

La fonction densité de probabilité de vitesse d'une particule est développée en série de Taylor autour du point \vec{x} :

$$f^1(\vec{x} - \frac{d_p \vec{k}}{2}, \vec{c}, t) = f^1(\vec{x}, \vec{c}, t) - \frac{d_p k_i}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} f^1(\vec{x}, \vec{c}, t) + \dots \quad (\text{II.90})$$

Dans la suite de cette section nous noterons $f^1(\vec{x}, \vec{c}_1, t) = f_1^1$ et $f^1(\vec{x}, \vec{c}_2, t) = f_2^1$. L'équation (Eq. II.89) peut être approchée au premier ordre par l'équation :

$$f^2((\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{c}_1, \vec{c}_2, t) = g_0(x) f_1^1 f_2^1 \left(1 + \frac{1}{2} d_p k_i \frac{\partial}{\partial x_i} \ln(f_2^1/f_1^1) \right) \quad (\text{II.91})$$

Le terme $f_1^1 f_2^1$ est estimé à partir de la théorie de Grad :

$$f_1^1 f_2^1 = f_1^0 f_2^0 + \frac{1}{2!} a_{ij} (f_1^0 f_{2,ij}^0 + f_{1,ij}^0 f_2^0) + \frac{1}{3!} a_{ijm} (f_1^0 f_{2,ijm}^0 + f_{1,ijm}^0 f_2^0), \quad (\text{II.92})$$

où les termes non linéaires en a_{ij} et a_{ijm} ont été négligés. De plus si l'écoulement est quasi uniforme et proche de l'état stationnaire alors l'approximation suivante peut être faite : $\ln(f_2^1/f_1^1) \approx \ln(f_2^0/f_1^0)$.

Avec ces approximations les intégrales (Eq. II.73) et (Eq. II.75) peuvent être évaluées analytiquement ([Jenkins and Richman, 1985](#)).

Le terme de source de quantité de mouvement due aux collisions est nul. Le terme source d'énergie cinétique turbulente de la phase solide due aux collisions peut s'écrire sous la forme :

$$\chi_{mm} = -\frac{12}{d_p} \alpha_s^2 \rho_s g_0 (1 - e^2) \sqrt{\frac{T_s}{\pi}} T_s + 3 \alpha_s^2 \rho_s g_0 (1 - e^2) T_s \frac{\partial u_{s,m}}{\partial x_m} \quad (\text{II.93})$$

Le terme de flux de quantité de mouvement due aux collisions s'écrit :

$$\begin{aligned} \theta_{ij} = & -2 \alpha_s^2 \rho_s g_0 (1 + e) T_s \delta_{ij} \\ & + \frac{4}{5} \alpha_s^2 \rho_s d_p g_0 (1 + e) \sqrt{\frac{T_s}{\pi}} \left(\frac{\partial u_{s,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{s,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{s,m}}{\partial x_m} \delta_{ij} \right) \\ & + \frac{4}{5} \alpha_s^2 \rho_s d_p g_0 (1 + e) a_{ij} \end{aligned}$$

Le terme de flux d'énergie cinétique turbulente de la phase solide due aux collisions s'écrit :

$$\theta_{ijj} = \frac{6}{5}\alpha_s^2\rho_s g_0(1+e)a_{ijj} - \frac{8}{3}\alpha_s^2\rho_s d_p g_0(1+e)\sqrt{\frac{2k_s}{3\Pi}}k_{s,i}$$

Ces résultats nous serviront pour obtenir les fermetures des termes de dissipation et de diffusion dus aux effets collisionnels dans l'équation de transport pour k_s et du terme de contrainte collisionnelle pour le moment d'ordre 2.

g) Détermination des moments

En utilisant le modèle de Boussinesq, $\Lambda_{s,ij}$ s'écrit :

$$\Lambda_{s,ij} = -\nu_s^t \left[\frac{\partial u_{s,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{s,j}}{\partial x_i} \right] + \frac{2}{3}\delta_{ij}(k_s + \nu_s^t \frac{\partial u_{s,m}}{\partial x_m}) \quad (\text{II.94})$$

[Boëlle et al. \(1994\)](#) ont proposé la formulation suivante pour la viscosité turbulente de la phase solide ν_s^t qui prend en compte la présence du fluide interstitielle :

$$\begin{cases} \nu_s^t &= \left[\frac{2}{3} \frac{\tau_{fs}^t}{\tau_{fs}} k_{fs} + \frac{2}{3} k_s (1 + \alpha_s g_0 \mathcal{A}) \right] \left[\frac{2}{\tau_{fs}} + \frac{\mathcal{B}}{\tau_s^c} \right]^{-1} \\ \mathcal{A} &= \frac{2}{5}(1+e)(3e-1) \\ \mathcal{B} &= \frac{1}{5}(1+e)(3-e) \end{cases} \quad (\text{II.95})$$

$k_{fs} = \text{Tr}(\overline{\overline{\Lambda}_{fs}})$ désigne la covariance des fluctuations de vitesses fluide-particule, celle-ci est égale à la trace du tenseur des corrélations des vitesses fluide-particule $\overline{\overline{\Lambda}_{fs}}$.

Le tenseur des contraintes dues aux collisions θ_{ij} peut également être exprimé en fonction d'une viscosité collisionnelle ν_s^c .

$$\theta_{ij} = -\alpha_s \rho_s \nu_s^c \left[\frac{\partial u_{s,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{s,j}}{\partial x_i} \right] + \frac{\theta_{mm}}{3} \delta_{ij} \quad (\text{II.96})$$

La viscosité collisionnelle est donnée par :

$$\nu_s^c = \frac{4}{5}\alpha_s g_0(1+e) \left(\nu_s^t + d_p \sqrt{\frac{2k_s}{3\pi}} \right) \quad (\text{II.97})$$

Conformément aux résultats obtenus par [Jenkins and Richman \(1985\)](#). Le tenseur des contraintes effectives $\Sigma_{s,ij}$ peut être écrit sous une forme plus classique :

$$\Sigma_{s,ij} = \alpha_s \left[p_s^{eff} + \left(\frac{2}{3}\mu_s - \zeta_s \right) \frac{\partial u_{s,m}}{\partial x_m} \right] \delta_{ij} - \alpha_s \mu_s \left[\frac{\partial u_{s,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{s,j}}{\partial x_i} \right] \quad (\text{II.98})$$

Où p_s^{eff} , ζ_s désigne la pression effective (Eq. [II.99](#)) et la viscosité de volume ("bulk viscosity") (Eq. [II.100](#)) et μ_s représente la viscosité dynamique de la phase solide.

$$p_s^{eff} = \frac{3}{2}\rho_s(1 + 2\alpha_s g_0(1 + e))k_s \quad (\text{II.99})$$

$$\zeta_s = \frac{4}{3}d_p\alpha_s\rho_s g_0(1 + e)\sqrt{\frac{3k_s}{2\pi}} \quad (\text{II.100})$$

$$\mu_s = \rho_s(\nu_s^t + \nu_s^c) \quad (\text{II.101})$$

En définissant une pression solide "turbulente" p_s^t (Eq. II.102), l'équation (Eq. II.98) peut s'écrire sous une forme plus compacte.

$$p_s^t = \left[p_s^{eff} + \left(\frac{2}{3}\mu_s - \zeta_s \right) \frac{\partial u_{s,m}}{\partial x_m} \right] \quad (\text{II.102})$$

$$\Sigma_{s,ij} = \alpha_s p_s^t \delta_{ij} - \alpha_s \mu_s \left[\frac{\partial u_{s,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{s,j}}{\partial x_i} \right] \quad (\text{II.103})$$

Le vecteur flux d'énergie effectif, E_{ijm} , peut être écrit sous la forme : $E_{ijm} = -2\alpha_s \rho_s (K_s^{cin} + K_s^c) \frac{\partial k_s}{\partial x_i}$. La contribution cinétique K_s^{cin} a été déterminé par [Balzer et al. \(1995\)](#) par une analyse en cisaillement uniforme.

$$K_s^{cin} = \left(\frac{1}{3}\tau_{fs}^t k_{fs} + \frac{5}{9}\tau_{fs} \frac{2}{3}k_s(1 + \alpha_s g_0 \phi_c) \right) \left(1 + \frac{5}{9}\tau_{fs} \frac{\zeta_c}{\tau_s^c} \right)^{-1} \quad (\text{II.104})$$

Les constantes ϕ_c et ζ_c sont données par : $\phi_c = 3(1 + e)^2(2e - 1)/5$ et $\zeta_c = (1 + e)(49 - 33e)/100$. g_0 désigne la fonction de distribution radiale qui prend en compte l'augmentation de la probabilité des collisions quand le fluide devient plus dense. Pour un gaz rare, g_0 est égale un, alors que g_0 tend vers l'infini quand les particules sont très proches. La formulation proposée par [Ma and Ahmadi \(1986\)](#) est valable pour les gaz denses et a été utilisée dans le modèle (Eq. II.105).

$$g_0 = \frac{1 + 2.5\alpha_s + 4.5904\alpha_s^2 + 4.515439\alpha_s^3}{(1 - (\alpha_s/\alpha_s^{max}))^{0.678021}} \quad (\text{II.105})$$

Le flux d'énergie dues aux collisions peu s'écrire sous la forme : $\theta_{ijj} = -2\alpha_s \rho_s K_s^c \frac{\partial k_s}{\partial x_i}$, où le coefficient de diffusion, K_s^c , est défini par :

$$K_s^c = \alpha_s g_0(1 + e) \left(\frac{6}{5}K_s^{cin} + \frac{4}{3}d\sqrt{\frac{2k_s}{3\pi}} \right) \quad (\text{II.106})$$

II.3.3 Modélisation des fluctuations de vitesse fluide-particule

La fermeture du système d'équations (Eqs. II.28, II.29 et II.61) présenté dans la section II.1.3 ne se limite pas à la modélisation des termes interfaciaux, de contrainte et des moments du second ordre, il faut également modéliser les termes de vitesse de dérive (Eq.

II.63) et le tenseur des corrélations de vitesse fluide-particule : $\overline{\overline{\Lambda_{fs}}}$. Il existe différentes propositions dans la littérature pour modéliser ces termes.

a) Modèle basé sur la théorie de Tchen

D'après la définition générale d'un coefficient de diffusion, le flux de particules est défini comme le produit d'un coefficient $\overline{\overline{D_k^t}}$ et du gradient de concentration ([Batchelor, 1948](#); [Hinze, 1975](#)).

$$\alpha_k \vec{U}_k = -\overline{\overline{D_k^t}} \cdot \vec{\nabla} \alpha_k \quad (\text{II.107})$$

Les particules sont transportées par le mouvement moyen et dispersées par la turbulence, le coefficient de dispersion est dès lors relié aux fluctuations de vitesses. En suivant les résultats généraux sur la dispersion en turbulence homogène et stationnaire ([Csanady, 1973](#)), ce coefficient de dispersion peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\overline{\overline{D_k^t}} = \left\langle \vec{u}_k' \otimes \vec{u}_k' \right\rangle_k \int_0^t \overline{\overline{R_k}}(\tau) d\tau \quad (\text{II.108})$$

où $\overline{\overline{R_k}}$ représente la fonction d'auto-corrélation de Lagrange (Eq. II.109) et son intégrale temporelle désigne l'échelle intégrale de temps de Lagrange (Eq. II.110).

$$\overline{\overline{R_k}}(\tau) = \frac{\left\langle \vec{u}_k'(t) \otimes \vec{u}_k'(t + \tau) \right\rangle_k}{\left(\left\langle \vec{u}_k'^2 \right\rangle_k \otimes \left\langle \vec{u}_k'^2 \right\rangle_k^T \right)^{1/2}} \quad (\text{II.109})$$

$$\overline{\overline{\tau_k^t}} = \int_0^\infty \overline{\overline{R_k}}(\tau) d\tau \quad (\text{II.110})$$

Avec ces notations on obtient la forme générale d'un coefficient de dispersion turbulente sous la forme suivante :

$$\overline{\overline{D_k^t}} = \left\langle \vec{u}_k' \otimes \vec{u}_k' \right\rangle_k \overline{\overline{\tau_k^t}} \quad (\text{II.111})$$

Nous nous intéressons maintenant au cas d'une turbulence homogène et stationnaire, où la vitesse moyenne du fluide sur l'horizontale est nulle ($U_{f,1} = 0$) et dans le cas d'une suspension très diluée. La présence des particules n'a pas d'effets notables sur la turbulence du fluide et les collisions peuvent être négligées. D'après [Simonin and Viollet \(1990\)](#), le flux de particules peut s'écrire sous la forme :

$$\alpha_s U_{s,i} = \alpha_s (U_{r,i} + U_{d,i}) \quad (\text{II.112})$$

Dans ces conditions, le terme de transfert de quantité de mouvement entre les phases peut être obtenu en moyennant l'effort local appliqué à une particule. $M_{s,i} = \langle X_s f_{s,i} \rangle = \alpha_s \langle f_{s,i} \rangle_s$ où $f_{s,i}$ désigne l'effort local exercé par le fluide sur une particule par unité de volume. Cette force peut s'écrire sous la forme : $f_{s,i} = -\rho_s u_{r,i} / \tau_{fs} + \rho_f (du_{f,i}/dt - g_i)$. En

introduisant cette expression dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement (Eq. II.29) et en remarquant que d/dt est la dérivée Lagrangienne, en suivant une particule, une expression peut être obtenue pour la vitesse relative (*Deutsch and Simonin, 1991*) :

$$\alpha_s U_{r,i} = \tau_{fs} \left(-\langle u'_{s,i} u'_{s,j} \rangle_s + \frac{\rho_f}{\rho_s} \langle u'_{f,i} u'_{s,j} \rangle_s \right) \frac{\partial \alpha_s}{\partial x_j} \quad (\text{II.113})$$

Cette expression est valable si le terme de flottabilité est égale à la force aérodynamique (force de traînée basée sur la vitesse de chute libre, $\vec{U}_f - \vec{U}_s$). Autrement dit, la vitesse relative entre les phases est la somme de deux mécanismes : une vitesse de chute libre et une vitesse de dispersion, appelée vitesse de dérive ("drift velocity"). La vitesse de chute libre peut être obtenue à partir de l'équation Lagrangienne du mouvement moyennée sur un ensemble de particules, elle est définie par : $\tau_{fs} \left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_s} \right) g_i$. La vitesse de dérive peut s'écrire sous la forme :

$$u_{d,i} = -D_{fs,ij}^t \left(\frac{1}{\alpha_s \rho_s} \frac{\partial \alpha_s \rho_s}{\partial x_i} - \frac{1}{\alpha_f \rho_f} \frac{\partial \alpha_f \rho_f}{\partial x_i} \right) \quad (\text{II.114})$$

A partir des équations (Eqs. II.107, II.113 et II.114), le coefficient de dispersion pour la phase solide peut s'exprimer sous la forme :

$$D_{s,ij}^t = D_{fs,ij}^t + \tau_{fs} \left(-\langle u'_{s,i} u'_{s,j} \rangle_s + \frac{\rho_f}{\rho_s} \langle u'_{f,i} u'_{s,j} \rangle_s \right) \frac{\partial \alpha_s}{\partial x_j} \quad (\text{II.115})$$

Le coefficient de dispersion pour la phase solide est alors la somme de deux termes. Le premier correspond au coefficient de dispersion et le second terme représente deux mécanismes : l'un dû aux mouvements aléatoires des particules, l'autre aux corrélations de vitesse fluide-particule. Dans le cas de petites particules, le temps de relaxation, τ_{fs} , tend vers zéro et le coefficient de dispersion pour la phase solide se réduit au coefficient de dispersion.

Tchen (1947) fut l'un des premiers à étudier la dispersion de particules dans un écoulement turbulent. Il a montré qu'il était possible d'exprimer l'intensité turbulente, le coefficient de dispersion et la fonction de corrélation de Lagrange pour les particules en fonction de la fonction de corrélation de Lagrange du fluide. En imposant la forme de cette fonction, *Tchen (1947)* a dérivé une expression analytique pour décrire les caractéristiques du mouvement des particules. Pour obtenir cette expression, l'auteur a fait les hypothèses suivantes :

1. La turbulence est stationnaire et homogène.
2. Les particules sont sphériques et suivent la loi de Stokes.
3. Les particules sont petites, comparées à la plus petite échelle de longueur du mouvement du fluide.
4. Au cours du mouvement des particules, leur voisinage est formé du même fluide.

Cette dernière hypothèse est certainement la plus critiquable (*Hinze, 1975; Deutsch and Simonin, 1991*), car les particules fluides peuvent être distordues sous l'effet du ci-

saillement turbulent, par exemple. *Deutsch and Simonin* (1991) ont proposé d'exprimer la fonction de corrélation de Lagrange pour le mouvement du fluide "vu par les particules", *i.e.* : en suivant les trajectoires des particules.

$$R_{f,ij}(\tau) = \frac{\langle u'_{f,i}(t)u'_{f,j}(t+\tau) \rangle_s}{\langle u'^2_{f,i} \rangle_s \langle u'^2_{f,j} \rangle_s} \quad (\text{II.116})$$

L'échelle de temps caractéristique des fluctuations de vitesse fluide vue par les particules s'obtient alors par :

$$\tau_{fs,ij}^t = \int_0^\infty R_{f,ij}(\tau) d\tau \quad (\text{II.117})$$

La théorie de *Tchen* (1947) peut être généralisée, en éliminant les hypothèses 2 et 4. Le tenseur de dispersion pour la phase solide peut alors être défini en terme de la fonction de corrélation de Lagrange :

$$D_{s,ij}^t = \tau_{fs,ij}^t \left(\langle u'^2_{f,i} \rangle_s \langle u'^2_{f,j} \rangle_s \right)^{1/2} \quad (\text{II.118})$$

Le déplacement des particules est contrôlé par le mouvement moyen alors que la dispersion est régie par le mouvement turbulent. De plus, si la vitesse de l'écoulement moyen est suffisamment importante, le mécanisme de dissipation par décroissance des tourbillons est négligeable devant le changement des corrélations spatiales. Ainsi le tenseur des corrélation de Lagrange devient un tenseur spatial Eulérien :

$$R_{f,ij}(\tau) = \frac{\langle u'_{f,i}(\vec{x})u'_{f,j}(\vec{x} + \tau\vec{U}_r) \rangle_f}{\langle u'^2_{f,i} \rangle_f \langle u'^2_{f,j} \rangle_f} \quad (\text{II.119})$$

Où l'hypothèse $\langle u'^2_{f,i} \rangle_s = \langle u'^2_{f,i} \rangle_f$ est supposée valide, ce qui revient à supposer que le déplacement des particules est régi par le mouvement moyen, et que l'énergie cinétique turbulente de la phase fluide et la distribution locale instantanée des particules ne sont pas corrélées. D'après *Csanady* (1963) et *Deutsch and Simonin* (1991), dans le cas d'une turbulence homogène et isotrope, $R_f(\tau)$ peut être écrite, dans la direction de l'écoulement moyen comme $R_f(\tau) = \exp(-t/\tau_{fs}^t)$. Sous ces hypothèses, il est possible d'obtenir une expression pour les corrélations de vitesse de la phase solide et les corrélations de vitesse fluide-particule (*Peirano and Leckner*, 1998) :

$$\langle \vec{u}'_s \otimes \vec{u}'_s \rangle_s = \langle \vec{u}'_f \otimes \vec{u}'_f \rangle_s \frac{b^2 + \xi}{1 + \xi} \quad (\text{II.120})$$

$$\langle \vec{u}'_f \otimes \vec{u}'_s \rangle_s = \langle \vec{u}'_f \otimes \vec{u}'_f \rangle_s \frac{b + \xi}{1 + \xi} \quad (\text{II.121})$$

Avec $b = \rho_f/\rho_s$ et $\xi = \tau_{fs}^t/\tau_{fs}$.

En introduisant les équations (Eq. II.118, II.120, II.121) dans l'équation (Eq. II.115) on obtient l'expression suivante :

$$D_{fs,ij}^t = \tau_{fs,ij}^t \langle u'_{f,i} u'_{s,j} \rangle_s \quad (\text{II.122})$$

Les résultats obtenus dans la direction de l'écoulement moyen peuvent être généralisés aux autres directions. Ceci peut être réalisé dans l'équation (Eq. II.117) où le coefficient C_β dépend de la direction considérée. Des valeurs numériques de ce coefficient ont été déduites par *Deutsch and Simonin* (1991) des travaux de *Wells and Stock* (1983). Dans le cas d'une turbulence anisotrope, le coefficient de dispersion $D_{fs,ij}^t$ est un tenseur $D_{fs,ij}^t = \tau_{fs,ij}^t \langle u'_{f,i} u'_{s,j} \rangle_s$ et l'équation (Eq. II.114) fournit une fermeture pour la vitesse de dérive.

D'autres modèles ont été proposés pour modéliser les corrélations de vitesse solide, fluide-solide et la vitesse de dérive. Ces modèles ont été obtenus pour des cas spécifiques et leur validité doit être vérifiée par comparaison avec des mesures expérimentales (*Peirano and Leckner*, 1998). Une autre approche consiste à résoudre des équations de transport pour la vitesse de dérive et les corrélations de vitesse fluide-solide. Dans la suite de ce travail nous adopterons le modèle de *Tchen* (1947) généralisé pour modéliser la vitesse de dérive.

b) Equation de transport pour la covariance des fluctuations de vitesse fluide-particule

Le tenseur des corrélations des fluctuations de vitesse fluide-particule est exprimé en utilisant le modèle de Boussinesq (*Simonin et al.*, 1995) :

$$\Lambda_{fs,ij} = \frac{1}{3} \left[k_{fs} + 2\nu_{fs}^t \left(\frac{\partial u_{f,m}}{\partial x_m} + \frac{\partial u_{s,m}}{\partial x_m} \right) \right] \delta_{ij} - 2\nu_{fs}^t \left[\frac{\partial u_{f,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{s,j}}{\partial x_i} \right] \quad (\text{II.123})$$

La viscosité turbulente fluide-particule étant donnée par la relation : $\nu_{fs}^t = k_{fs} \tau_{fs}^t / 3$ où k_{fs} désigne la covariance fluide-particule.

Une équation de transport pour le tenseur des corrélations des fluctuations de vitesse fluide-particule peut être déduite en appliquant une procédure similaire à celle utilisée pour obtenir l'équation de transport pour le tenseur de Reynolds dans le cas monophasique. En définissant $NS_f(\vec{u}_f) = 0$ un opérateur correspondant à l'équation de conservation de la quantité de mouvement pour la phase fluide et $NS_s(\vec{u}_s) = 0$ pour la phase solide, l'équation de transport pour le tenseur des corrélations des fluctuations de vitesse fluide-particule s'obtient en moyennant l'équation suivante : $\langle NS_f(\vec{u}_f) \otimes \vec{u}'_s + NS_s(\vec{u}_s) \otimes \vec{u}'_f \rangle = 0$. Les détails concernant l'obtention de cette équation a été présentés par *Peirano* (1996) cités dans *Peirano and Leckner* (1998).

$$\frac{D\alpha_s \rho_s \langle u'_{f,i} u'_{s,j} \rangle}{Dt} = -\frac{\partial D_{fs,ijm}}{\partial x_m} + P_{fs,ij} + \phi_{fs,ij} + \Pi_{fs,ij} + E_{fs,ij} \quad (\text{II.124})$$

Les termes du membre de droite peuvent être interprétés de la même manière que dans le cas monophasique. D_{fs} représente la diffusion, P_{fs} la production, ϕ_{fs} les déformations dues à la pression, Π_{fs} est spécifique aux écoulements multiphasiques puisqu'il correspond aux interactions entre les phases enfin E_{fs} correspond à la dissipation.

En prenant la trace de l'équation précédente, on obtient l'équation de transport pour la covariance fluide-particule k_{fs} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_s \rho_s k_{fs}) + \vec{\nabla}(\alpha_s \rho_s \vec{u}_s k_{fs}) = & \vec{\nabla} \left(\alpha_s \rho_s \frac{\nu_{fs}^t}{\sigma_{ks}} \vec{\nabla} k_{fs} \right) - \alpha_s \rho_s \epsilon_{fs} + \Pi_{kfs} \\ & - \alpha_s \rho_s \left\{ \left\langle \vec{u}'_f \otimes \vec{u}'_s \right\rangle_s \vec{\nabla} \right\}^T \vec{u}_s - \alpha_s \rho_s \left\{ \left\langle \vec{u}'_s \otimes \vec{u}'_f \right\rangle_s \vec{\nabla} \right\}^T \vec{u}_f \end{aligned} \quad (\text{II.125})$$

où le terme de diffusion a été modélisé sous la forme : $D_{fs,iim} = \alpha_s \rho_s \frac{\nu_{fs}^t}{\sigma_{kf}} \frac{\partial k_{fs}}{\partial x_m}$ et le terme de dissipation par : $E_{fs,ii} = \alpha_s \rho_s \frac{k_{fs}}{\tau_{fs}^t}$. Le terme d'interaction Π_{kfs} s'écrit :

$$\Pi_{kfs} = -\frac{\alpha_s \rho_s}{\tau_{fs}} ((1 + X_{fs}) k_{fs} - 2X_{fs} k_s - 2k_f) \quad (\text{II.126})$$

$$\text{avec } X_{fs} = \frac{\alpha_s \rho_s}{\alpha_f \rho_f}$$

II.3.4 Bilan sur les fermetures de la turbulence pour le modèle diphasique

En nous basant sur les résultats théoriques précédents, nous proposons quatre approches pour modéliser la turbulence et la dispersion turbulente dans le modèle diphasique 2D vertical à surface libre de transport sédimentaire (Cf. section I.3.3). Pour des raisons de commodité, nous introduisons les notations T1, T2, T3 et T4 pour identifier ces différents modèles. Les effets de dispersion sont modélisés en suivant la théorie de *Tchen* (1947) (Eq. II.114). Un modèle de turbulence de type $k-\varepsilon$ pour la phase fluide basé sur les travaux de *Simonin and Viollet* (1990) est ensuite présenté (Cf. i). Enfin deux modèles de turbulence pour la phase solide sont décrits, l'un basé sur la théorie de *Tchen* (1947) qui propose une fermeture algébrique des tenseurs des corrélations de vitesses solide et fluide-solide, l'autre basé sur la théorie cinétique des écoulements granulaires qui consiste en la résolution de deux équations de transport pour l'énergie cinétique turbulente de la phase solide (k_s) et pour la covariance des vitesses fluide-solide (k_{fs}).

Dans les modèles notés T1 et T2 seule la turbulence de la phase fluide est modélisée par le modèle $k_f - \varepsilon_f$ présenté ci-dessus. Les effets de dispersion turbulente sont négligés dans le modèle T1 (*i.e.* : $\vec{u}_d = \vec{0}$). Dans le modèle T2, l'hypothèse d'égalité du tenseur des corrélations de vitesse fluide-particule avec le tenseur des corrélations de vitesse fluide $\left\langle \vec{u}'_f \otimes \vec{u}'_s \right\rangle_s = \left\langle \vec{u}'_f \otimes \vec{u}'_f \right\rangle_f$ permet de fermer le coefficient de dispersion turbulente dans l'équation (Eq. II.60).

Deux approches incluant la prise en compte des grandeurs turbulentes ont été développées, la première consiste à faire l'hypothèse que les particules sont agitées localement par la turbulence du fluide ("Local Particle Shaking"), ce qui permet d'appliquer la théorie de *Tchen* (1947) et ainsi d'obtenir des fermetures algébriques pour l'énergie cinétique tur-

bulente de la phase solide et les interactions turbulentes fluide-particule ([Simonin, 1991](#)) (Cf. paragraphe a). Dans une seconde approche, en supposant que le modèle de Boussinesq est valide pour exprimer le tenseur de Reynolds pour la phase solide et la covariance des fluctuations de vitesse fluide-particule, un modèle basé sur des équations de transport pour ces deux grandeurs est présenté par [Boëlle et al. \(1994\)](#).

a) Modèle $k_f - \varepsilon_f$ sans dispersion (T1)

Le modèle T1 est basé sur la résolution d'un modèle $k - \varepsilon$ pour la phase fluide. La turbulence de la phase particulaire et les effets de dispersion ne sont pas modélisés.

i) Modèle de turbulence pour la phase fluide

Pour modéliser la turbulence de la phase fluide nous avons adopté le modèle développé par [Simonin and Viollet \(1990\)](#). Ce modèle est un modèle de type $k - \epsilon$ modifié par des termes supplémentaires qui tiennent compte du transfert de la quantité de mouvement turbulente entre les phases.

Les équations de transport pour l'énergie cinétique turbulente et la dissipation turbulente de la phase fluide sont modélisées par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_f \rho_f k_f) + \vec{\nabla} \cdot (\alpha_f \rho_f k_f \vec{u}_f) = & \vec{\nabla} \cdot \left(\alpha_f \left(\mu_f + \frac{\mu_f^t}{\sigma_k} \right) \vec{\nabla} k_f \right) - \alpha_f \rho_f \left\{ \left\langle \vec{u}_f' \otimes \vec{u}_f' \right\rangle_f \cdot \vec{\nabla} \right\}^T \vec{u}_f \\ & - \alpha_f \rho_f \epsilon_f + \Pi_{k_f} \end{aligned} \quad (\text{II.127})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_f \rho_f \epsilon_f) + \vec{\nabla} \cdot (\alpha_f \rho_f \epsilon_f \vec{u}_f) = & \vec{\nabla} \cdot \left(\alpha_f \left(\mu_f + \frac{\mu_f^t}{\sigma_\epsilon} \right) \vec{\nabla} \epsilon_f \right) + \Pi_{\epsilon_f} \\ & - \alpha_f \rho_f \frac{\epsilon_f}{k_f} \left(C_{\epsilon_1} \left\{ \left\langle \vec{u}_f' \otimes \vec{u}_f' \right\rangle_f \cdot \vec{\nabla} \right\}^T \vec{u}_f + C_{\epsilon_2} \epsilon_f \right) \end{aligned} \quad (\text{II.128})$$

Le tenseur des contraintes de Reynolds pour la phase fluide, $\overline{\overline{T_f^{Re}}}$, est modélisé par le modèle de Boussinesq pour un écoulement compressible ([Enwald et al., 1996](#)).

$$\overline{\overline{T_f^{Re}}} = -\rho_f \left\langle \vec{u}_f' \otimes \vec{u}_f' \right\rangle_f = -\frac{2}{3} \rho_f k_f \overline{\overline{I}} + 2 \rho_f \nu_f^t \left[\overline{\overline{D_f}} - \frac{1}{3} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_f) \overline{\overline{I}} \right] \quad (\text{II.129})$$

La viscosité cinématique turbulente de la phase fluide, ν_f^t , est définie par $\nu_f^t = 2k_f \tau_f^t / 3$, et l'échelle de temps des grands tourbillons, τ_f^t , par la relation (Eq. II.64.a) ([Simonin et al., 1995](#)).

Dans les équations (Eq. II.127) et (Eq. II.128) les termes Π_{k_f} et Π_{ϵ_f} représentent les termes d'interaction entre les phases. Dans ce premier modèle, la turbulence de la phase

solide et les effets de dispersion sont négligés, il n'y a donc pas de transfert possible d'énergie cinétique turbulente avec la phase solide et ces termes sont identiquement nuls.

$$\Pi_{k_f} = 0 \quad (\text{II.130})$$

$$\Pi_{\epsilon_f} = 0 \quad (\text{II.131})$$

Les valeurs utilisées dans le modèle $k_f - \epsilon_f$ sont choisies comme suit $C_\mu = 0.09$, $C_{\epsilon 1} = 1.44$, $C_{\epsilon 2} = 1.92$, $\sigma_k = 1$ et $\sigma_\epsilon = 1.2$. Toutes ces constantes ont les valeurs standard du modèle monophasique.

Le modèle $k_f - \epsilon_f$ est basé sur l'hypothèse d'isotropie de la turbulence, celui-ci n'est donc pas valable près du fond. Pour remédier à ce défaut plusieurs propositions ont été faites ([Mohammadi and Pironneau, 1994](#)). La solution la plus simple consiste à supprimer la sous-couche visqueuse et la zone logarithmique du domaine de calcul et d'imposer les conditions aux limites sur k , ϵ et u à partir de la loi logarithmique. Ces conditions aux limites ne sont pas faciles à coder ([Mohammadi and Pironneau, 1994](#)). Une autre solution classiquement utilisée consiste à introduire des fonctions modifiant les coefficients du modèle standard dans la zone de proche paroi. Ces fonctions dépendent du nombre de Reynolds. Ce modèle est appelé modèle $k - \epsilon$ à bas nombre de Reynolds. La dissipation de l'énergie cinétique turbulente ϵ présente un fort gradient dans la direction normale à la paroi, le maillage doit donc être très fin dans la zone de proche paroi. Le critère couramment utilisé est de fixer le premier point de maillage à une distance correspondant à $z^+ = 1$ avec $z^+ = \frac{zu_*}{\nu_f}$ le nombre de Reynolds local. Une troisième solution consiste à utiliser un modèle à deux couches ([Mohammadi and Pironneau, 1994](#)), cette technique est plus robuste et stable que la solution du modèle à bas nombre de Reynolds et surtout ne nécessite pas un maillage aussi fin à la paroi. Nous avons choisi d'utiliser cette méthode dans le code de calcul.

Le principe est simple, le domaine de calcul est divisé en deux sous-domaines, une zone où le nombre de Reynolds est fort et une zone où le nombre de Reynolds est faible. Dans la première zone les équations du modèle $k_f - \epsilon_f$ sont résolues. Dans la zone de proche paroi, la dissipation ϵ_f et la viscosité turbulente ν_f^t sont calculées à partir de relations algébriques :

$$\epsilon_f = \frac{k_f^{3/2}}{l_\epsilon} \quad (\text{II.132})$$

$$\nu_f^t = c_\mu \sqrt{k_f} l_\mu \quad (\text{II.133})$$

l_μ et l_ϵ sont deux échelles de longueur qui intègrent les effets d'atténuation de la turbulence dans la zone de proche paroi.

$$l_\mu = \kappa C_\mu^{-3/4} z (1 - e^{-\frac{z^+}{z_0^+}}) \quad (\text{II.134})$$

$$l_\varepsilon = \kappa c_\mu^{-3/4} z (1 - e^{-\frac{z^+}{2\kappa c_\mu^{3/4}}}) \quad (\text{II.135})$$

Le nombre de Reynolds local z^+ est défini par : $z^+ = \frac{\sqrt{k_f} z}{\nu_f}$. Celui-ci est basé sur k_f plutôt que u_* comme défini précédemment. La limite entre les deux sous-domaines est déterminée en fonction du nombre de Reynolds local, fixé ici à $z^+ = 70$. Le raccord de u_f , k_f et ε_f à l'intersection des deux domaines et l'imposition des conditions sur ces variables à la paroi ferment le modèle.

Remarque :

Dans le cadre d'application à des écoulements en milieux côtiers et estuariens, les vitesses d'écoulement typique sont de l'ordre de quelques dizaines de centimètres par seconde, ce qui correspond à une vitesse de frottement (u_*) de l'ordre du centimètre par seconde. En conséquence pour appliquer un modèle $k-\varepsilon$ à bas nombre de Reynolds, il faudrait que le premier point de maillage soit situé à environ 10^{-4} m au-dessus du fond. Une telle finesse de maillage ne paraît pas envisageable dans le cadre du transport sédimentaire et le modèle à deux couches nous semble être un bon compromis entre précision et robustesse.

ii) Modélisation de la dispersion

Dans ce modèle les effets de dispersion des particules par la turbulence sont négligés, le tenseur de dispersion $\overline{D_{fs}^t}$, est nul.

$$\overline{D_{fs}^t} = 0 \quad (\text{II.136})$$

b) Modèle $k_f - \varepsilon_f$ avec dispersion (T2)

Le modèle T2 est basé sur la résolution d'un modèle $k - \varepsilon$ pour la phase fluide. Les effets de dispersion sont pris en compte en faisant l'hypothèse simplificatrice suivante pour les corrélations des fluctuations de vitesse fluide-particule : $\langle \vec{u}_f \otimes \vec{u}_s \rangle_s = \langle \vec{u}_f \otimes \vec{u}_f \rangle_f$. La turbulence de la phase particulaire n'est pas modélisée.

i) Modèle de turbulence pour la phase fluide

Le modèle T2 est basé sur la résolution des mêmes équations que le modèle T1 pour la turbulence de la phase fluide. Les termes d'interactions Π_{k_f} et Π_{ε_f} présents dans les équations (Eq. II.127) et (Eq. II.128) sont définis par les relations suivantes (*Simonin and Violet, 1990*) :

$$\Pi_{k_f} = \frac{\alpha_f \rho_f}{\tau_{fs}} \underbrace{(-2k_f + k_{fs})}_{=0} + \vec{u}_d \cdot \vec{u}_r \quad (\text{II.137})$$

L'hypothèse faite sur les corrélations des fluctuations de vitesse fluide-particule impose l'égalité $k_{fs} = 2k_f$.

$$\Pi_{\epsilon_f} = C_{\epsilon_3} \frac{\epsilon_f}{k_f} \Pi_{k_f} \quad (\text{II.138})$$

La constante C_{ϵ_3} qui apparaît dans le terme d'interaction pour la dissipation turbulente a été déterminée empiriquement pour des écoulements de jet gaz-particule par [Elghobashi and Abou-Arab \(1983\)](#) : $C_{\epsilon_3} = 1.2$.

ii) Modélisation de la dispersion

Les effets de dispersion des particules par la turbulence sont pris en compte et le tenseur de dispersion $\overline{\overline{D_{fs}^t}}$ est écrit sous la forme :

$$\overline{\overline{D_{fs}^t}} = \tau_{fs}^t \left\langle \vec{u}_f' \otimes \vec{u}_f' \right\rangle_f \quad (\text{II.139})$$

Cette approximation a sûrement pour effet de surestimer les effets de dispersion des particules ([Greimann et al., 1999](#)).

c) Modèle algébrique (T3)

Le modèle T3 est basé sur la résolution d'un modèle $k - \varepsilon$ pour la phase fluide. La turbulence de la phase particulaire est modélisée en suivant les résultats obtenus dans le cadre de la théorie de [Tchen \(1947\)](#) (Cf. [a](#))). L'énergie cinétique turbulente pour la phase solide (k_s) et la covariance fluide-particule (k_{fs}) sont obtenues par des relations algébriques en fonction de l'énergie cinétique turbulente de la phase fluide (k_f). Les effets de dispersion sont pris en compte sans faire d'hypothèse supplémentaire.

i) Modèle de turbulence pour la phase fluide

Le modèle T3 est basé sur la résolution des mêmes équations que le modèle T1 pour la turbulence de la phase fluide. Les termes d'interactions Π_{k_f} et Π_{ϵ_f} sont définis par les relations suivantes [Simonin and Viollet \(1990\)](#) :

$$\Pi_{k_f} = \frac{\alpha_f \rho_f}{\tau_{fs}} (-2k_f + k_{fs} + \vec{u}_d \cdot \vec{u}_r) \quad (\text{II.140})$$

$$\Pi_{\epsilon_f} = C_{\epsilon_3} \frac{\epsilon_f}{k_f} \Pi_{k_f} \quad (\text{II.141})$$

ii) Modèle de turbulence pour la phase solide

A partir des résultats présentés dans la section [a](#)), en faisant les hypothèses d'un milieu dilué constitué de particules lourdes et d'une turbulence homogène, isotrope et stationnaire, des équations algébriques pour l'énergie cinétique turbulente de la phase solide et les interactions turbulentes fluide-particule ([Simonin, 1991](#)) sont obtenues :

$$\left\langle \vec{u}'_s \otimes \vec{u}'_s \right\rangle_s = \left\langle \vec{u}'_f \otimes \vec{u}'_f \right\rangle_s \frac{b^2 + \xi}{1 + \xi} \quad (\text{II.142})$$

$$\left\langle \vec{u}'_f \otimes \vec{u}'_s \right\rangle_s = \left\langle \vec{u}'_f \otimes \vec{u}'_f \right\rangle_s \frac{b + \xi}{1 + \xi} \quad (\text{II.143})$$

Avec $b = \rho_f / \rho_s$ et $\xi = \tau_{fs}^t / \tau_{fs}$.

Les viscosités cinématiques turbulentes pour la phase solide et la covariance des fluctuations de vitesse fluide-particule sont obtenues à partir des résultats de la théorie cinétique des milieux granulaires :

$$\nu_s^t = \nu_{fs}^t + \frac{1}{2} \tau_{fs}^t \frac{2}{3} k_s \quad (\text{II.144})$$

et

$$\nu_{fs}^t = \frac{\tau_{fs}^t k_{fs}}{3} \quad (\text{II.145})$$

iii) Modélisation de la dispersion

Les effets de dispersion des particules par la turbulence sont pris en compte et le tenseur de dispersion $\overline{\overline{D_{fs}^t}}$ est écrit sous la forme :

$$\overline{\overline{D_{fs}^t}} = \tau_{fs}^t \left\langle \vec{u}'_f \otimes \vec{u}'_s \right\rangle_s \quad (\text{II.146})$$

d) Modèle du premier ordre (T4)

Le modèle T4 est basé sur la résolution d'un modèle $k - \varepsilon$ pour la phase fluide. La turbulence de la phase particulaire est modélisée en suivant les résultats obtenus de le cadre de la théorie cinétique des écoulements granulaires (*Peirano and Leckner, 1998*) (Cf. II.3.2). Des équations de transport pour l'énergie cinétique turbulente pour la phase solide (k_s) et la covariance fluide-particule (k_{fs}) sont obtenus. Les effets de dispersion sont pris en compte sans faire d'hypothèse supplémentaire.

i) Modèle de turbulence pour la phase fluide

Le modèle T4 est basé sur la résolution des mêmes équations que le modèle T1 pour la phase fluide. Les termes d'interactions Π_{kf} et Π_{ϵ_f} sont définis par les relations suivantes *Simonin and Viollet (1990)*

ii) Modèle à équations de transport : modèle k_s - k_{fs}

Le modèle de turbulence pour la phase solide k_s - k_{fs} est basé sur la théorie cinétique des milieux granulaires (*Jenkins and Richman, 1985*) (Cf. section II.3.2) et les modèles

d'interaction fluide-particule ([Tchen, 1947](#)). Ce modèle est basé sur deux équations de transport, une pour l'énergie cinétique turbulente de la phase solide, k_s (Eq. [II.147](#)) et pour la covariance des vitesses fluide-solide, k_{fs} (Eq. [II.150](#)).

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_s \rho_s k_s) + \vec{\nabla} \cdot (\alpha_s \rho_s \vec{u}_s k_s) = & \vec{\nabla} \cdot (D_{ks} \vec{\nabla} k_s) - \alpha_s \rho_s \{ \langle \vec{u}'_s \otimes \vec{u}'_s \rangle_s \cdot \vec{\nabla} \}^T \vec{u}_s + \Pi_{ks} \\ & - \alpha_s \rho_s \frac{1 - e^2}{3 \tau_s^c} k_s \end{aligned} \quad (\text{II.147})$$

$D_{ks} = \alpha_s \rho_s (K_s^{cin} + K_s^c)$, K_s^{cin} et K_s^c représentent la diffusivité turbulente et collisionnelle, elles sont définies, respectivement, par les équations (Eq. [II.104](#)) et (Eq. [II.106](#)).

Le tenseur des contraintes de Reynolds pour la phase solide est défini par la relation :

$$\overline{\overline{T_s^{Re}}} = -\rho_s \langle \vec{u}'_s \otimes \vec{u}'_s \rangle_s = -\frac{2}{3} \rho_s k_s \overline{\overline{I}} + 2 \rho_s \nu_s^t \left[\overline{\overline{D_s}} - \frac{1}{3} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_s) \overline{\overline{I}} \right] \quad (\text{II.148})$$

où la viscosité cinématique turbulente pour la phase solide est donnée la relation (Eq. [II.95](#)).

Dans l'équation (Eq. [II.147](#)), le terme Π_{ks} représente les interactions avec le mouvement turbulent de la phase fluide.

$$\Pi_{ks} = -\frac{\alpha_s \rho_s}{\tau_{fs}} (2k_s - k_{fs}) \quad (\text{II.149})$$

La covariance des vitesses fluide-particule, k_{fs} , est définie comme la trace du tenseur $\langle \vec{u}'_f \otimes \vec{u}'_s \rangle_s$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_s \rho_s k_{fs}) + \vec{\nabla} \cdot (\alpha_s \rho_s \vec{u}_s k_{fs}) = & \vec{\nabla} \cdot \left(\alpha_s \rho_s \frac{\nu_{fs}^t}{\sigma_{ks}} \vec{\nabla} k_{fs} \right) - \alpha_s \rho_s \epsilon_{fs} + \Pi_{kfs} \\ & - \alpha_s \rho_s \{ \langle \vec{u}'_f \otimes \vec{u}'_s \rangle_s \cdot \vec{\nabla} \}^T \vec{u}_s - \alpha_s \rho_s \{ \langle \vec{u}'_s \otimes \vec{u}'_f \rangle_s \cdot \vec{\nabla} \}^T \vec{u}_f \end{aligned} \quad (\text{II.150})$$

$$\langle \vec{u}'_f \otimes \vec{u}'_s \rangle_s = -\frac{1}{3} k_{fs} \overline{\overline{I}} + \nu_{fs}^t \left[\overline{\overline{D_{fs}}} - \frac{1}{3} Tr(\overline{\overline{D_{fs}}}) \overline{\overline{I}} \right] \quad (\text{II.151})$$

où $\overline{\overline{D_{fs}}} = \vec{\nabla} \vec{u}_f + \left(\vec{\nabla} \vec{u}_s \right)^T$ représente le tenseur des taux de déformation. La viscosité cinématique turbulente pour la covariance fluide-particule est donnée par : $\nu_{fs}^t = \frac{k_{fs} \tau_{fs}^t}{3}$. Et la dissipation, ϵ_{fs} , est donnée par : $\epsilon_{fs} = k_{fs} / \tau_{fs}^t$. Finalement, le terme d'interaction, Π_{kfs} , est exprimé par (Eq. [II.126](#)) avec $X_{fs} = \frac{\alpha_s \rho_s}{\alpha_f \rho_f}$

$$\Pi_{kfs} = -\frac{\alpha_s \rho_s}{\tau_{fs}} ((1 + X_{fs}) k_{fs} - 2 X_{fs} k_s - 2 k_f) \quad (\text{II.152})$$

iii) Modélisation de la dispersion

Les effets de dispersion des particules par la turbulence sont pris en compte et le tenseur de dispersion $\overline{\overline{D_{fs}^t}}$ est écrit sous la forme :

$$\overline{\overline{D_{fs}^t}} = \tau_{fs}^t \left\langle \vec{u}_f' \otimes \vec{u}_s' \right\rangle_s \quad (\text{II.153})$$

iv) Loi constitutive : modélisation des termes de contrainte visqueuse et turbulente

Nous avons présenté un modèle de turbulence pour les phases fluide et solide. En accord avec le modèle de Boussinesq, les contraintes de Reynolds sont modélisées en introduisant des coefficients de viscosité turbulente. Nous allons donc synthétiser cette modélisation afin d'intégrer les processus turbulents dans les équations de conservation de la quantité de mouvement.

Initialement [Barbry \(2000\)](#) a utilisé une formulation basée sur les contraintes du mélange en introduisant un facteur d'amplification β dépendant de la fraction volumique solide α_s (Eq. II.154) ([Graham, 1981](#)). Ce terme correspond aux contraintes visqueuses. D'après la modélisation de la turbulence adoptée nous proposons de modéliser le terme de contrainte sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \alpha_f \left(\overline{\overline{\tau_f}} + \overline{\overline{T_f^{Re}}} \right) = \alpha_f p_f^t \overline{\overline{I}} + \alpha_f 2 (\mu_f^t + \mu_f) \overline{\overline{D_f}} + \alpha_s 2 \mu_f \overline{\overline{D_s}} \\ \alpha_s \left(\overline{\overline{\tau_s}} + \overline{\overline{\Sigma_s}} \right) = \alpha_s p_s^t \overline{\overline{I}} + \alpha_s \alpha_f \beta 2 \mu_f \overline{\overline{D_f}} + \alpha_s 2 (\mu_s + \alpha_s \beta \mu_f) \overline{\overline{D_s}} \end{cases} \quad (\text{II.154})$$

Les termes μ_f^t et μ_s ont été définis au chapitre II. p_f^t est donnée par l'équation (Eq. II.155) et p_s^t est donnée par l'équation (Eq. II.102).

$$p_f^t = -\frac{2}{3} \left(\rho_f k_f + \mu_f^t \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_f \right) \quad (\text{II.155})$$

e) Récapitulatif des modèles de turbulence implémentés dans le code

Finalement, quatre modèles de turbulence ont été implémentés dans le code de calcul. Ceux-ci seront appliqués dans le chapitre III à deux cas-tests qui permettent d'illustrer les intérêts et limites de chacun d'entre eux. Le tableau suivant (Tab. II.1) résume les caractéristiques de ces modèles.

Notations	Phase fluide	Phase solide	Coefficient de dispersion
T1	Modèle $k_f - \varepsilon_f$	-	$\overline{\overline{D_{fs}^t}} = 0$
T2	Modèle $k_f - \varepsilon_f$	-	$\overline{\overline{D_{fs}^t}} = \tau_{fs}^t \langle \vec{u}_f' \otimes \vec{u}_f' \rangle$
T3	Modèle $k_f - \varepsilon_f$	Modèle algébrique	$\overline{\overline{D_{fs}^t}} = \tau_{fs}^t \langle \vec{u}_f' \otimes \vec{u}_s' \rangle$
T4	Modèle $k_f - \varepsilon_f$	Modèle $k_s - k_{fs}$	$\overline{\overline{D_{fs}^t}} = \tau_{fs}^t \langle \vec{u}_f' \otimes \vec{u}_s' \rangle$

TAB. II.1 – Tableau récapitulatif des modèles de turbulence implémentés dans le code de calcul

II.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté la démarche permettant d'aboutir aux équations du modèle diphasique de transport sédimentaire. L'intégration des équations de conservation instantanées est explicitée et des lois de transfert adaptées au cas du transport sédimentaire sont obtenues. Enfin, la description des phénomènes turbulents dans le cadre de la théorie cinétique des écoulements granulaires nous a permis de proposer quatre approches pour modéliser la turbulence dans le modèle diphasique de transport sédimentaire 2D vertical à surface libre (Cf. [1.3.3](#)). Ces différentes approches sont appliquées à deux cas-tests dans le chapitre suivant.

Chapitre III

Validation du modèle diphasique de transport sédimentaire

Dans ce chapitre nous présentons les différents cas-tests qui ont été réalisés pour la validation du modèle diphasique non-hydrostatique. Dans un premier temps nous allons nous intéresser à un cas-test hydrodynamique, l'écoulement sur une dune sous-marine, qui permet de vérifier la prédiction du champ de vitesse et de la turbulence. Ensuite, nous nous intéressons au cas de la sédimentation en eau calme. Le phénomène est correctement reproduit dans le cas de particules non cohésives. La comparaison des simulations dans le cas de la sédimentation de vase réelle permet d'identifier les lacunes du modèle et de dresser les perspectives de développement. Enfin, nous étudions le cas du transport en suspension de particules. Ce test permet d'illustrer les développements présentés dans la section précédente sur la modélisation de la turbulence. L'application du modèle à la dispersion de particules non-cohésives en écoulement pleinement turbulent met en évidence le bon comportement du modèle. Les principales caractéristiques de cet écoulement sont reproduites numériquement. Enfin, l'application au transport en suspension de particules cohésives, cas-test du canal hippodrome, permet d'identifier les besoins d'approfondissement théorique concernant la modélisation de la turbulence en milieu non dilué.

III.1 Ecoulement turbulent sur une dune sous-marine

III.1.1 Dispositif expérimental

La configuration présentée ici (Figure III.1-a) a fait l'objet d'une étude expérimentale conjointe [Movahedan and Bélorgey \(2005\)](#) avec laquelle nous comparons nos résultats ([Chauchat et al., 2005](#)). l'expérience a été réalisée dans un canal d'une longueur effective de 12 mètres avec une hauteur d'eau moyenne de 25 centimètres. La dune est placée à 3,5 mètres de l'entrée, elle s'étend sur 1,32 mètres de longueur et 15 centimètres de hauteur. Les résultats présentés ont été obtenus avec un maillage (Figure III.1-b) comportant 110 mailles dans la direction x et 41 mailles dans la direction z.

Nous avons réalisé trois simulations avec des vitesses moyennes de $U=0,19$ m/s ($Re \approx$

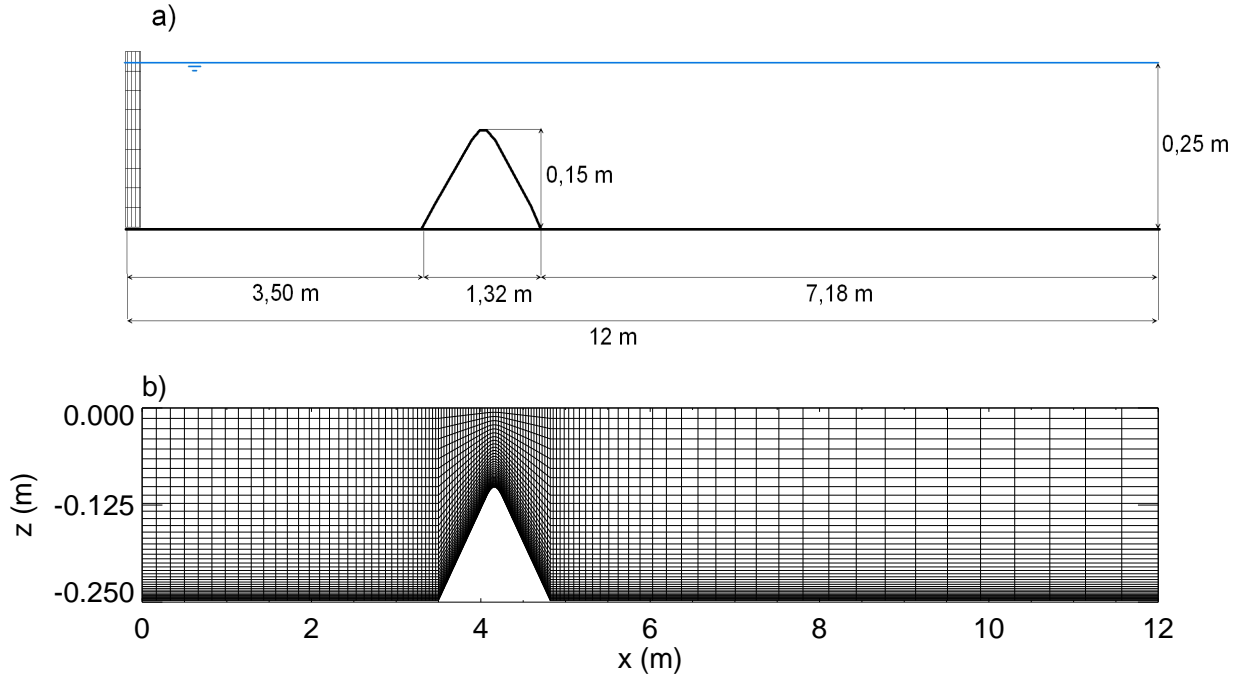


FIG. III.1 – Configuration expérimentale (a) et maillage de la zone d'étude (b).

$5 \cdot 10^4$), $U=0,24$ m/s ($Re \approx 7 \cdot 10^4$) et $U=0,36$ m/s ($Re \approx 10^5$) respectivement. Le pas de temps est fixé à 10^{-3} seconde. Le nombre de Reynolds est basé sur la viscosité de l'eau, la vitesse moyenne U et la hauteur d'eau moyenne dans le canal : $Re = \frac{UH}{\nu_f}$. Ces simulations sont effectuées sans particules solides.

Les conditions aux limites sont résumées dans le tableau ci-dessous (Tab. III.1). Une condition sur le débit est imposée à l'entrée du canal et une condition de Neumann est imposée sur l'élévation de la Surface Libre (SL). A la sortie, une condition de radiation avec relaxation à zéro est imposée sur l'élévation de la SL et une condition de Neumann est imposée sur la vitesse. Les conditions aux limites à la surface libre et au fond sont précisées dans l'équation (Eq. III.1). Le modèle k_ϵ à deux couches présenté au chapitre II est utilisé ici pour représenter les caractéristiques de la turbulence en proche paroi. Le temps de relaxation pour la condition de radiation est fixé à 10^3 s.

$$\begin{aligned} \text{A la surface libre : } \quad & \frac{\partial k_f}{\partial z} = \frac{\partial \epsilon_f}{\partial z} = 0 \\ \text{Au fond : } \quad & \frac{\partial k_f}{\partial z} = \frac{\partial \epsilon_f}{\partial z} = 0 \end{aligned} \tag{III.1}$$

Dans de très nombreuses applications l'hypothèse hydrostatique est vérifiée et le calcul de la pression sur la verticale est réalisé à partir de l'équation (Eq. III.2) :

	Ouest	Est	Fond
η	$\frac{\partial \eta}{\partial n} = 0$	$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \sqrt{g \cdot H} \frac{\partial \eta}{\partial n} = -\frac{\eta}{T_{rad}}$	
u_f	$u_f = Q_{in}/H$	$\frac{\partial u}{\partial n} = 0$	$u_f = 0$
k_f	$\frac{\partial k_f}{\partial n} = 0$	$\frac{\partial k_f}{\partial n} = 0$	$\frac{\partial k_f}{\partial z} = 0$
ε_f	$\frac{\partial \varepsilon_f}{\partial n} = 0$	$\frac{\partial \varepsilon_f}{\partial n} = 0$	$\frac{\partial \varepsilon_f}{\partial z} = 0$

TAB. III.1 – Conditions aux limites.

$$p = p_{atm} - \rho_f g z \quad (\text{III.2})$$

Dans le cas de l'écoulement sur une dune sous-marine l'existence d'accélération verticales dans le sillage de la dune peut affaiblir l'hypothèse hydrostatique et rendre nécessaire la résolution de l'équation complète sur z . La résolution du système linéaire pour la pression se fait par une méthode itérative (GMRES) très coûteuse en temps de calcul. Dans le but de simuler des écoulements sur des géométries complexes, il est nécessaire que le code de calcul permette le calcul de la pression sans tenir compte de l'hypothèse hydrostatique, par la suite nous l'appellerons Pression Non-Hydrostatique (PNH).

Le modèle basé sur la résolution des équations en faisant l'hypothèse hydrostatique sera noté PH dans la suite de cette section.

Les calculs ont été réalisés sur l'IBM SP5 du CRIHAN¹. L'ordre de grandeur du temps CPU moyen par itération est de 10^{-2} s pour un calcul en pression hydrostatique et de 0,5 s pour un calcul en pression non-hydrostatique. Le temps de calcul pour le cas non-hydrostatique est très supérieur, d'un facteur 50 environ, par rapport au cas hydrostatique. Il est donc légitime de s'interroger sur la validité de l'hypothèse hydrostatique.

¹CRIHAN : Centre de Ressources Informatiques de Haute-Normandie

III.1.2 Résultats et discussion

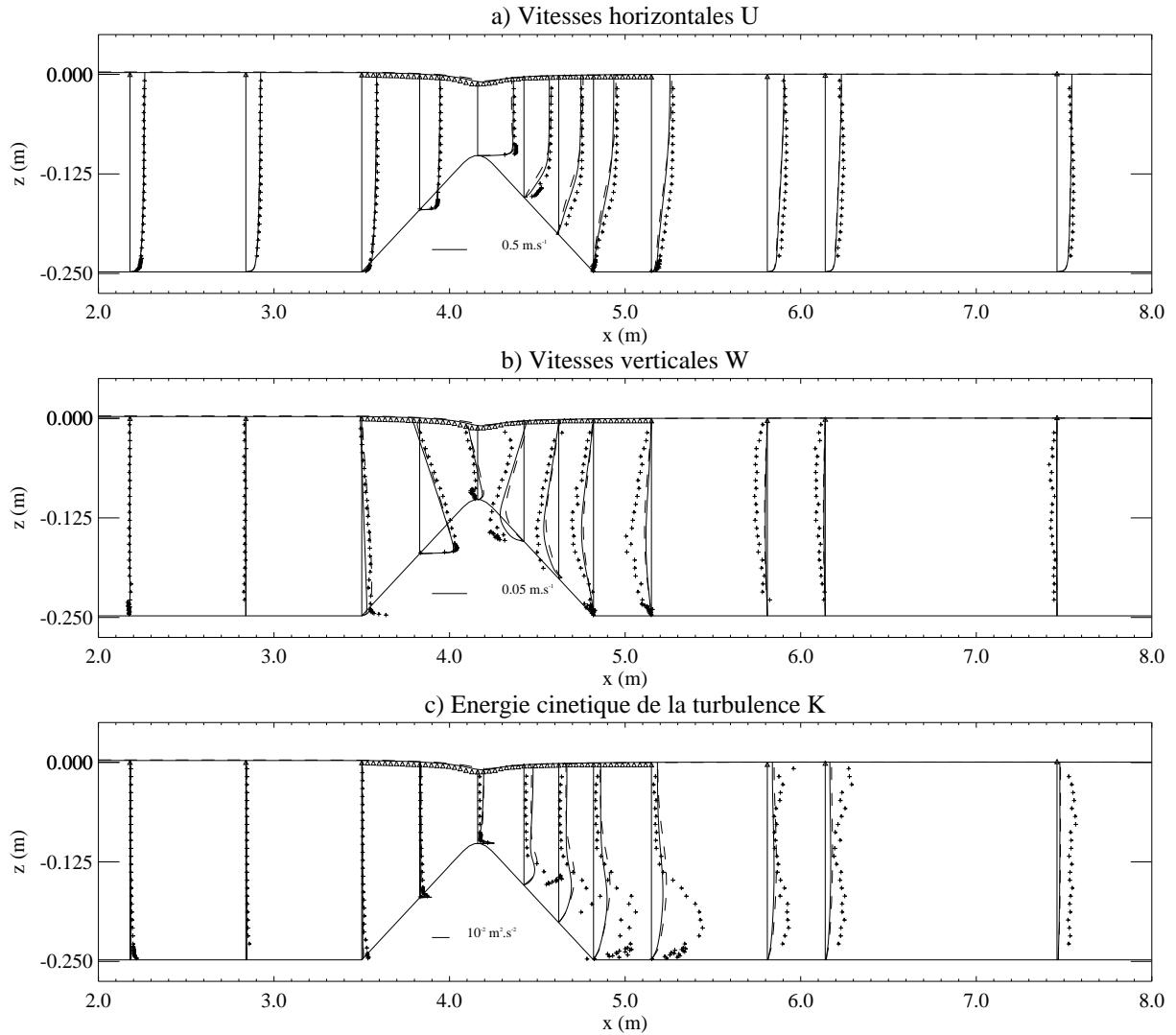


FIG. III.2 – Comparaison en plusieurs sections des résultats expérimentaux (+), des simulations avec le modèle PH (—) et des simulations avec le modèle PNH (- -) – ($U_0 \approx 0.19$ m/s).

Pour la première simulation, la figure (Fig. III.2-a) montre les profils de vitesses horizontaux pour les deux modèles PH et PNH. Au passage de la dune, l'écoulement est accéléré et atteint une vitesse maximale au voisinage du sommet. La surface libre se creuse sensiblement en ce point, accentuant ainsi l'accélération de l'écoulement. Dans la partie aval de la dune, la vitesse diminue et on retrouve le profil initial à environ une longueur de la dune dans le sillage.

Sur la figure (Fig. III.2-b), on observe que la vitesse verticale est positive sur toute la tranche d'eau lorsque l'écoulement aborde l'obstacle. Puis, à mi-hauteur et au sommet de la dune, elle est positive dans la partie basse et négative à proximité de la surface libre,

cela signifie que l'écoulement plonge à cette endroit. Juste après le sommet de la dune, l'écoulement plonge, la vitesse verticale est négative sauf à proximité de la surface libre. Après la dune, elle tend vers zéro. Notons toutefois que les vitesses verticales à l'aval de la dune sont plus importantes qu'à l'amont.

Sur la figure (Fig. III.2-c), l'énergie cinétique turbulente est faible avant la dune. Celle-ci augmente près du fond sur la pente amont avec un pic au voisinage du sommet. On observe une zone d'énergie importante lorsque l'écoulement est décéléré, surtout près du fond. Cette énergie diminue lorsque l'on s'éloigne de la dune. Notons également que l'énergie dans le sillage est plus importante que dans la partie amont de l'écoulement.

L'évolution de la surface libre est en accord avec l'expérience, on remarque une légère surélévation du niveau d'eau dans le canal. Les profils de vitesses horizontales avec les deux modèles PH et PNH sont confondus et en accord avec les résultats expérimentaux. Les profils de vitesses verticales sont également très proches pour les deux modèles de pression et en adéquation avec les résultats expérimentaux. Toutefois, on observe des écarts à proximité du sommet et dans le sillage de la dune où les vitesses verticales sont légèrement sous-estimées par rapport à l'expérience. La comparaison des profils d'énergie cinétique turbulente simulée par le modèle $k-\varepsilon$ et l'expérience montrent que celui-ci ne permet pas une description précise de la turbulence. Des différences assez importantes sont observées sur certains profils. En effet, dans le sillage proche ($4,8\text{ m} \leq x \leq 5,5\text{ m}$) l'énergie en partie basse est sous-évaluée d'un facteur 3 environ (Fig. III.3).

Globalement nous obtenons une bonne prédiction du champ des vitesses avec et sans l'approximation hydrostatique (modèles PH et PNH). L'application du modèle (*Guillou et al.*, 2000) est ici validée de manière quantitative sur ce test. A l'amont de la dune, l'énergie cinétique turbulente est proche de l'expérience. A l'arrière de la dune, elle s'éloigne des profils expérimentaux. *Stansby and Zhou* (1998), entre autres, reportent un écart similaire lorsque la section de l'écoulement augmente. Notons également les résultats présentés par *Bonnin et al.* (1995) à un workshop ERCOFTAC². Les résultats obtenus par différents modèles numériques sont comparés aux mesures expérimentales de *Almeida et al.* (1993) pour l'écoulement sur une dune modèle. Les résultats obtenus par un modèle $k-\varepsilon$ dans le sillage de la dune sous-estiment également le profil d'énergie cinétique turbulente d'un facteur compris entre 2 et 3 suivant la finesse du maillage. Les résultats obtenus avec le présent modèle sous-estiment l'énergie cinétique turbulente d'un facteur 3. Ce qui est du même ordre de grandeur que les écarts observés par *Bonnin et al.* (1995).

Le nombre de Froude est ici inférieur à l'unité dans tout le canal. Dans ces conditions l'écoulement est sous-critique partout et l'hypothèse hydrostatique est valide. Ceci est confirmé par les résultats présentés sur la figure (Fig. III.2).

²ERCOFTAC : European Research Community On Fluids, Turbulence And Combustion

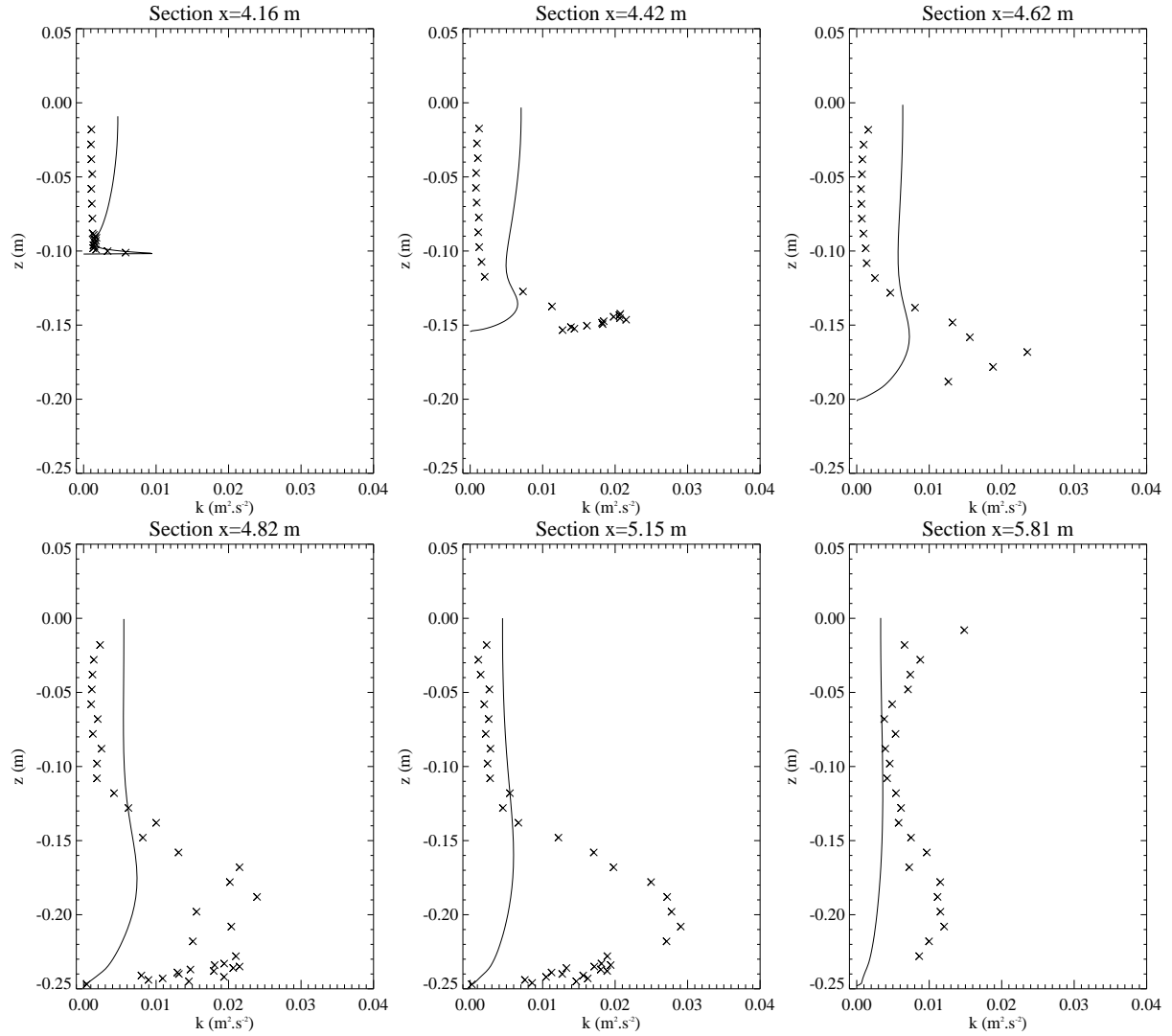


FIG. III.3 – Comparaison des profils d'énergie cinétique turbulente simulés avec le modèle PH (—) et les résultats expérimentaux (x) en plusieurs sections – ($U_0 \approx 0.19$ m/s).

Pour la deuxième simulation, les résultats obtenus avec les deux modèles de pression sont très proches. Des écarts assez importants avec l'expérience apparaissent sur le champ de vitesse et d'énergie cinétique turbulente dans le sillage de la dune. Expérimentalement l'écoulement "plonge", le flux s'écoule majoritairement près du fond avec une décélération de la vitesse horizontale près de la surface libre. Ceci n'est pas observé sur les résultats numériques.

L'énergie cinétique turbulente est ici encore sous-évaluée dans le sillage de la dune à proximité du fond. Sur cette configuration, un pic d'énergie cinétique turbulente est mesuré près de la surface libre après le sommet de la dune. Un phénomène de ressaut ondulé se produit comme le montre le cliché (Fig. III.5) pris lors de la campagne de mesure réalisée au laboratoire M2C³ par *Movahedan and Bélorgey* (2005). Celui-ci n'est

³Laboratoire M2C : Laboratoire de Morphodynamique Continentale et Côtière - UMR CNRS 6143

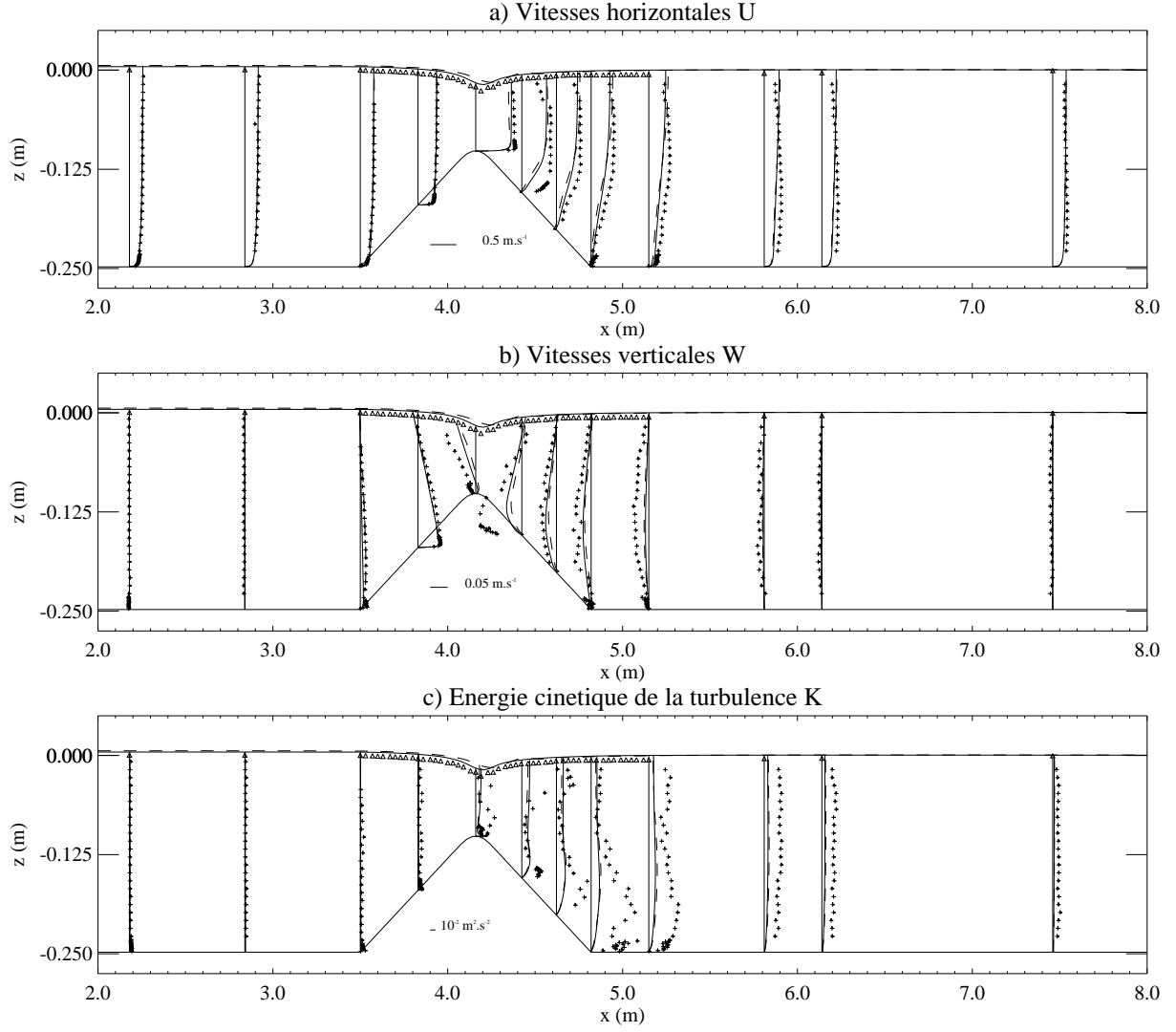


FIG. III.4 – Comparaison en plusieurs sections des résultats expérimentaux (+), des simulations avec le modèle PH (—) et des simulations avec le modèle PNH (- - -) – ($U_0 \approx 0.24$ m/s).

pas observé sur les résultats numériques. d'après la classification présentée par [Lowery and Liapis \(1999\)](#) (Fig. III.6) en fonction du nombre de Froude et du rapport d'obstruction⁴, cet écoulement se situe à la limite entre un écoulement sous-critique et un écoulement partiellement bloqué avec ressaut. Afin de lever cette indétermination et de mettre en évidence l'effet des accélérations verticales au passage de la dune, nous avons réalisé une troisième simulation avec une vitesse d'écoulement supérieure.

⁴rapport de la hauteur de l'obstacle sur la profondeur d'eau dans le canal



FIG. III.5 – Cliché - $U_0 \approx 0.24$ m/s.

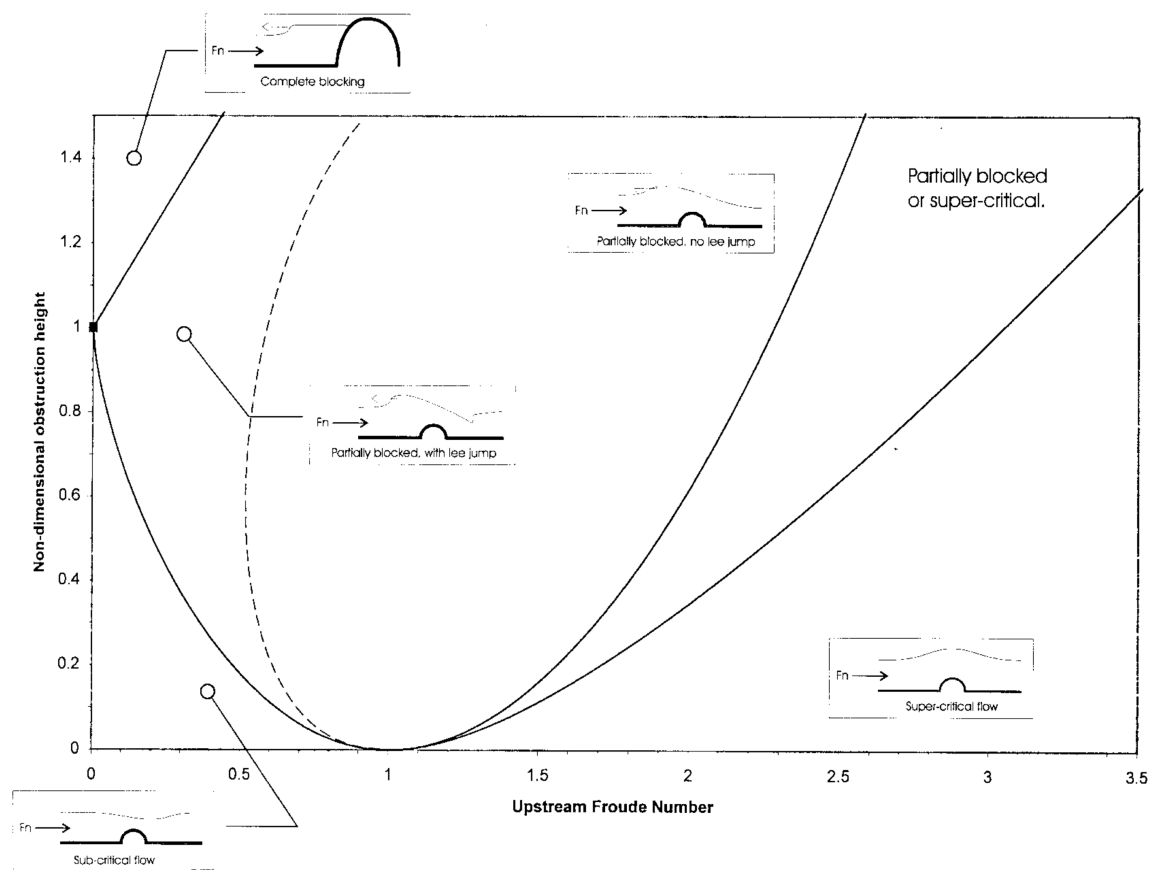


FIG. III.6 – Classification des écoulements sur un obstacle semi-circulaire (d'après [Lowery and Liapis \(1999\)](#)).

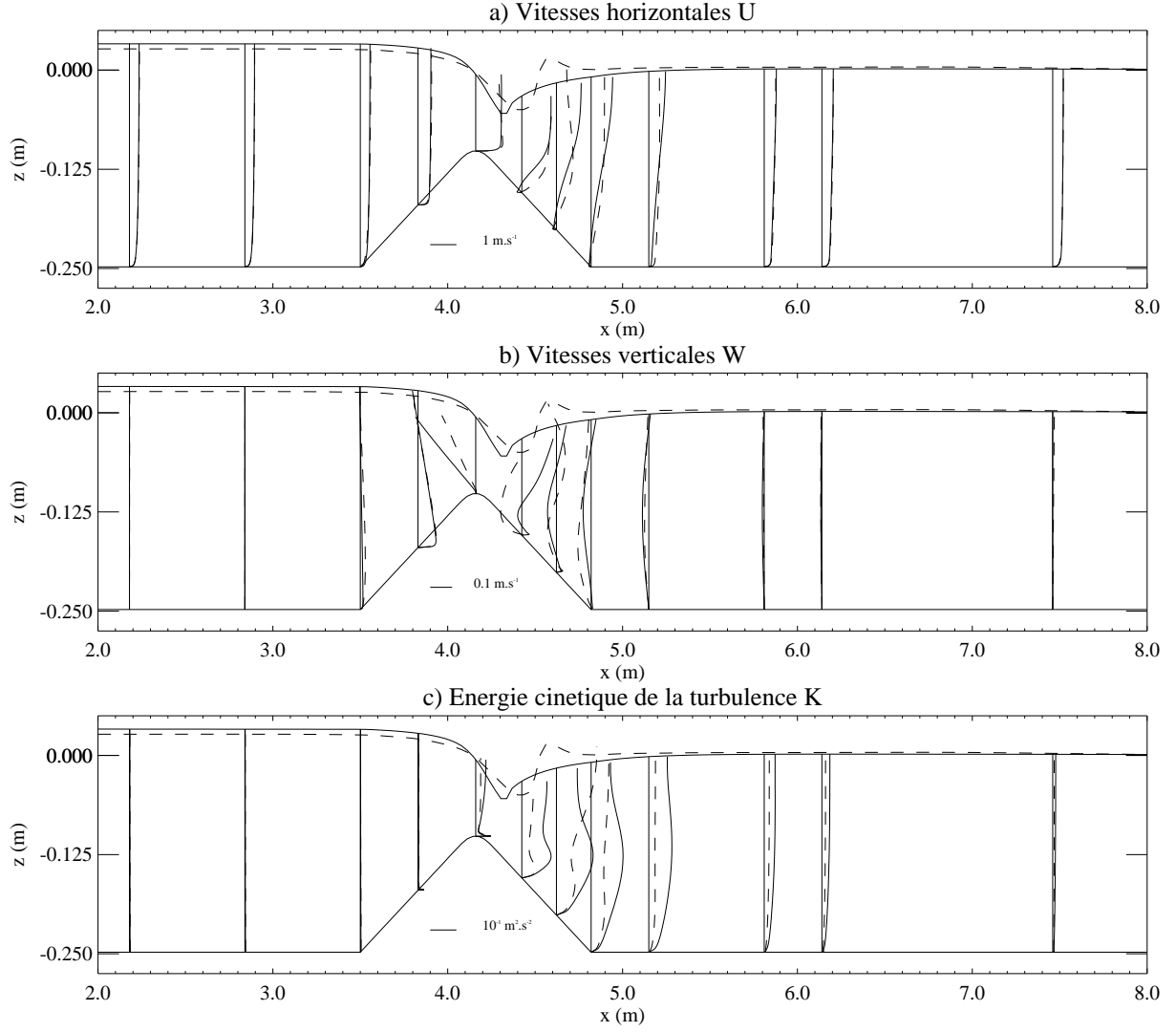


FIG. III.7 – Comparaison en plusieurs sections des simulations avec le modèle PH (—) et des simulations avec le modèle PNH (- - -) – ($U_0 \approx 0.36 \text{ m/s}$).

Sur la figure (Fig. III.7), on observe un creusement accentué de la surface libre et le niveau d'eau avant la dune est supérieur à celui à l'aval.

Au niveau du ressaut de la surface libre on observe des vitesses verticales importantes, de l'ordre de quelques dizaines de centimètres par seconde. La pression dynamique (Fig. III.8-c) varie dans des proportions importantes. Une surpression apparaît avant le ressaut suivi d'une dépression, l'amplitude de la pression dynamique dans cette zone est d'environ 500 Pa. Les résultats obtenus avec les deux modèles de pression sont très différents dans le sillage de la dune. Sur les figures (Fig. III.7-a, III.7-b, III.8-a et III.8-b), on observe une zone de recirculation près du fond avec le modèle PH alors que la simulation avec le modèle PNH prédit un écoulement plongeant à cet endroit. Ce phénomène avait été

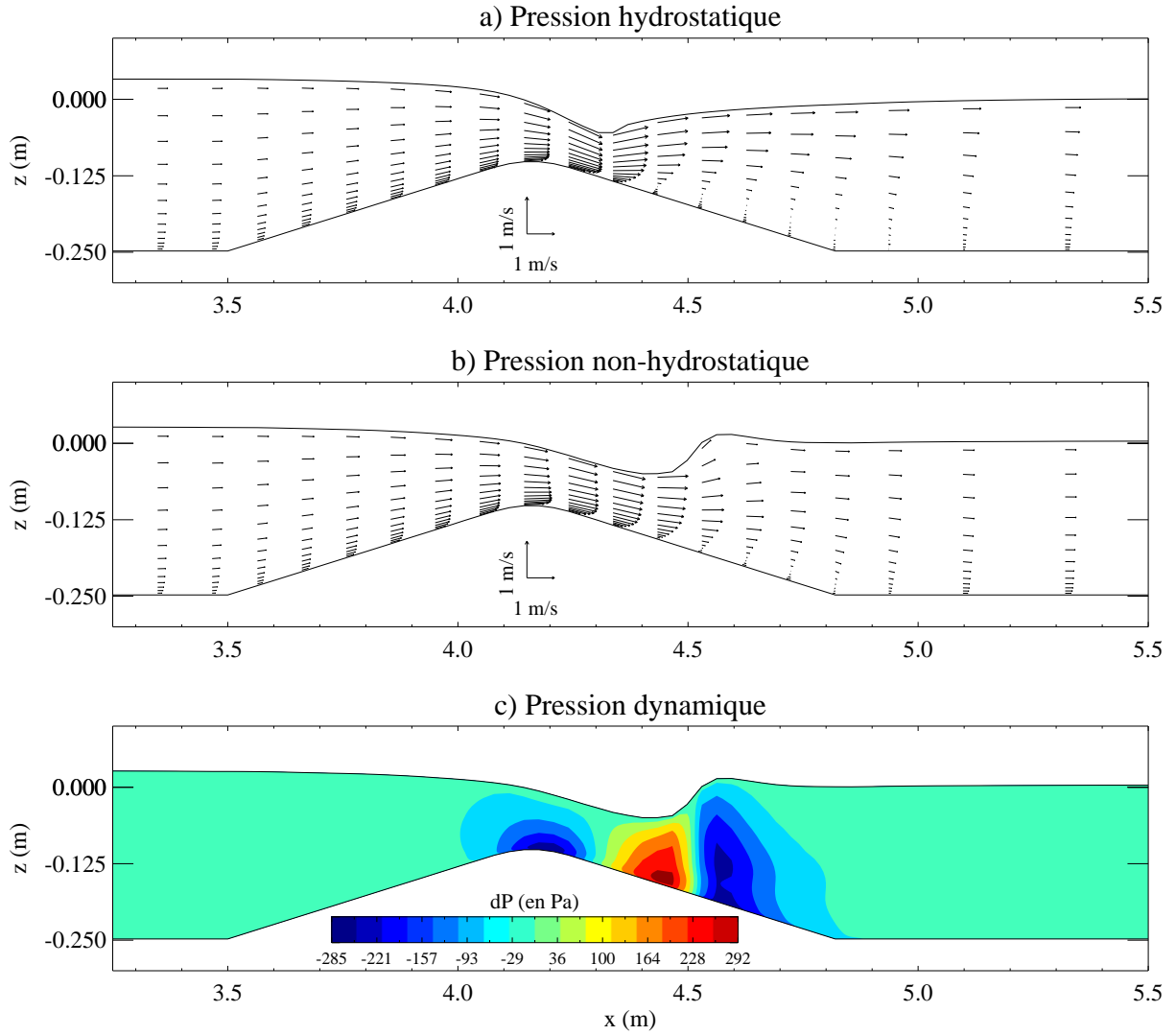


FIG. III.8 – Champ de vitesse autour de la dune avec le modèle NH (a) et le modèle PNH (b) ; Champ de pression dynamique (modèle PNH) (c) – ($U_0 \approx 0.36$ m/s).

observé dans l'expérience avec une vitesse plus faible ($U_0 \approx 0.24$ m/s). De même sur la figure (Fig. III.7-c) les profils d'énergie cinétique turbulente montre la présence de deux maxima, l'un près du fond, dû au cisaillement à la paroi et l'autre près de la SL, lié à la présence du ressaut et aux gradients de vitesses qui en résultent.

Clairement l'effet de la pression dynamique n'est plus négligeable dans cette configuration. Le phénomène de ressaut qui se produit est analogue au cas de l'écoulement compressible dans une tuyère convergente - divergente. Lorsque le nombre de Mach est supérieur à l'unité au col, la vitesse continue d'augmenter dans le divergent et une onde de choc se produit, induite par une discontinuité de la pression.

Ici, le nombre de Froude est supérieur à 1 au sommet de la dune, l'écoulement atteint un régime critique et la vitesse augmente sur la pente aval de la dune. Les accélérations verticales engendrent des effets dynamiques importants que nous avons observés sur le champ de pression dynamique (Fig. III.8-c). Contrairement au cas de l'écoulement en

tuyère, l'eau ne se comprime pas et l'accélération du fluide engendre une surpression avant le ressaut. La section de l'écoulement augmente rapidement, l'écoulement ralentit brutalement, ce qui rend négative la pression dynamique. Le modèle PNH prédit une zone de recirculation près de la surface, alors que le modèle PH prédit une zone de recirculation au fond. Ainsi, le premier est plus proche de la réalité physique.

III.1.3 Conclusions

Nous avons montré la capacité de notre modèle (avec et sans approximation hydrostatique) à reproduire correctement le champ de vitesse sur une configuration complexe pour un nombre de Froude inférieur à 0,5. Nous avons pu mettre en évidence l'importance de la pression dynamique pour des nombres de Froude supérieurs à un. Cependant, une étude approfondie de l'écoulement pour des nombres de Froude proches de l'unité reste à mener en parallèle avec l'expérience.

La turbulence a été modélisée par une fermeture de type $k-\varepsilon$. L'état physique de l'écoulement dans la zone proche de la dune n'est pas reproduit précisément par le modèle. En effet, il ne permet pas une description précise de la structure de la turbulence dans le sillage de la dune. Ceci constitue un défaut bien connu du modèle $k-\varepsilon$ sur ce type de problème (*Bonnin et al.*, 1995). Une solution possible, adoptée par *Sajjadi et al.* (2001) entre autres, consisterait à utiliser une fermeture du second ordre permettant de prendre en compte l'anisotropie de la turbulence dans le sillage de l'obstacle.

III.2 Etude de la sédimentation en eau calme

Avant de présenter les résultats du modèle diphasique sur la sédimentation en eau calme, nous allons décrire une expérience en colonne de sédimentation pour un matériel cohésif.

L'étude expérimentale de la sédimentation en eau calme est réalisée dans des colonnes transparentes. La figure (Fig. III.9) montre schématiquement l'évolution des sédiments dans la colonne au cours d'un essai. Les résultats expérimentaux sont classiquement résumés par une courbe de chute (settling curve) dont un exemple est donné sur la figure (Fig. III.10).

INITIAL : état initial

La colonne contient un mélange de concentration homogène (B).

PHASE 1 : Décantation

Dans un premier temps, on observe près de la surface libre une zone qui devient de plus en plus transparente. Après quelques minutes, une interface distincte apparaît entre l'eau claire (A) et la suspension (B) (Fig. III.9). Cette interface eau-sédiment descend doucement sous l'effet de la gravité. Sur la figure (Fig. III.10), cette phase correspond à la partie 1 de la courbe, l'interface chute à vitesse constante.

PHASE 2 : Chute entravée

Après un certain temps, la vitesse de chute de l'interface ralentit. Sur la figure (Fig. III.10), cette phase correspond à la partie 2 de la courbe, c'est la chute entravée (hindered settling) liée à l'augmentation de la concentration dans la colonne et à l'apparition de forces d'interaction entre les particules. Une deuxième interface se forme près du fond séparant la suspension (B) de la couche de sédiments fortement concentrée (C) (Fig. III.9) : c'est la lutocline.

PHASE 3 & 4 : Tassement et consolidation

Il existe souvent une troisième période où la vitesse de chute de l'interface ralentit encore. La quasi totalité des sédiments présents initialement sont dans la couche concentrée au fond (C) (Fig. III.9). Sur la figure (Fig. III.10), cette phase correspond à la partie 3, caractéristique du processus de tassement.

Enfin, dans la quatrième phase, tous les sédiments ont chuté dans la couche du fond (C), les deux interfaces se sont rejointes pour n'en former plus qu'une, c'est l'étape de consolidation. d'un point de vue microscopique celle-ci correspond à la structuration du lit par éjection de l'eau interstitielle.

Dans cette section nous présentons les résultats du modèle diphasique pour le cas de la sédimentation de particules en eau calme (*Chauchat et al., 2006b*). Nous nous intéresserons dans un premier temps au cas de la sédimentation en eau calme de particules sphériques non-cohésives pour lesquelles nous disposons de l'évolution du profil de concentration au cours du temps. Puis nous comparerons les résultats du modèle avec une expérience en colonne de sédimentation réalisée avec une vase réelle.

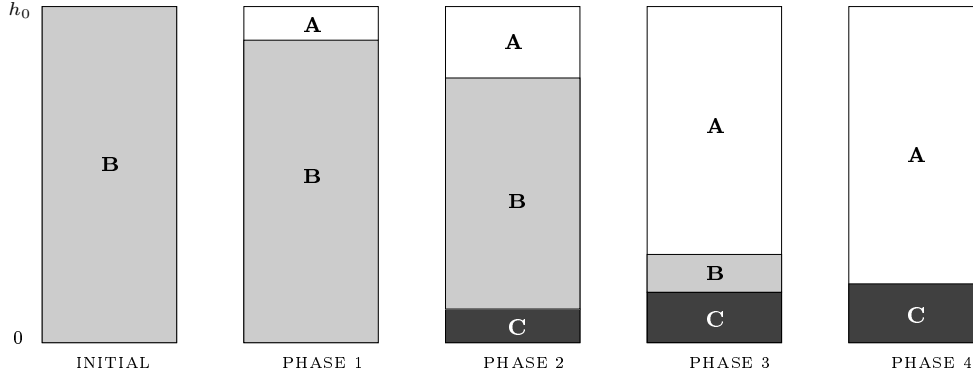


FIG. III.9 – Evolution de la concentration dans une colonne de sédimentation.

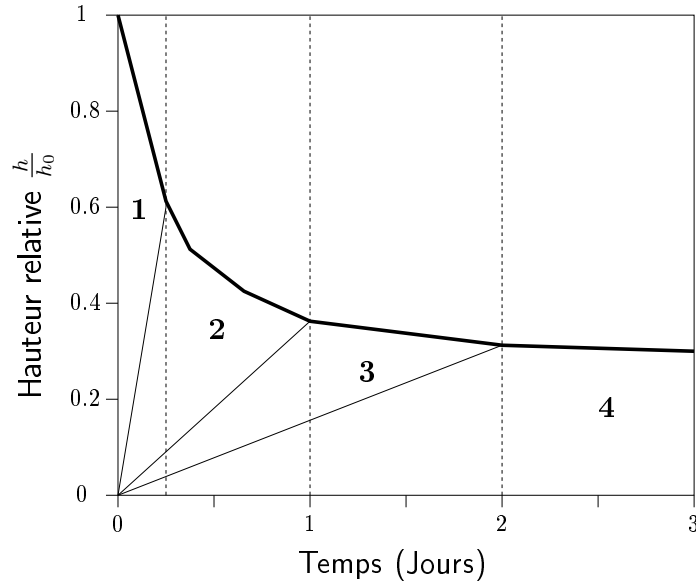


FIG. III.10 – Evolution de l'interface eau claire - suspension.

III.2.1 Cas d'une suspension de billes de polystyrène

Dans un premier temps, nous avons étudié une suspension de billes de polystyrène (diamètre $290 \pm 30 \mu\text{m}$, densité $1,05 \text{ kg.m}^{-3}$) dans de l'huile de silicone (viscosité 20 mPa.s^{-1} , densité $0,95 \text{ kg.m}^{-3}$). Pour ce cas, nous disposons de l'évolution du profil de concentration au cours du temps obtenue par IRM⁵ au LMSGC (Champs-sur-Marne) (*Pham Van Bang et al., 2006*). Une procédure de mélange a été appliquée pour obtenir un profil de concentration uniforme $\alpha_s=0,48$ à l'instant initial sur une profondeur de 5 centimètres environ. Les profils de concentration ont été moyennés sur 16 profils échantillonnés toutes les 3 secondes.

Numériquement, nous avons utilisé un maillage raffiné près du fond, constitué de 11 mailles sur l'horizontale et de 91 mailles sur la verticale. Le pas de temps est fixé à 5.10^{-4} s avec au moins 3 itérations de convergence pour le bouclage des non-linéarités. Les conditions aux limites sont précisées dans le tableau ci-dessous (Tab. III.2).

⁵Imagerie Résonance Magnétique

	Ouest	Est	Fond
η	$\frac{\partial \eta}{\partial n} = 0$	$\frac{\partial \eta}{\partial n} = 0$	
u_k	$u_k = 0$	$u_k = 0$	$u_k = 0$
w_k	$\frac{\partial w_k}{\partial n} = 0$	$\frac{\partial w_k}{\partial n} = 0$	$w_k = 0$
ϕ	$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$	$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$	

TAB. III.2 – Conditions aux limites.

ϕ désigne une quantité scalaire quelconque.

Résultats et discussion

Sur la figure (Fig. III.11) ont été représentés les isocontours de fraction volumique calculés en deux dimensions dans la cuve de sédimentation. On observe, comme cela a été relaté par [Wallis \(1969\)](#), la présence de deux interfaces, l'une entre l'eau claire et la suspension d'une fraction volumique moyenne de 0,48, l'autre entre cette suspension et une suspension dense de fraction volumique maximale de 0,6. Cette dernière interface correspond à la lutocline. Les positions de ces interfaces évoluent en sens contraire dans le temps comme le montre la figure (Fig. III.12), où les résultats expérimentaux et de calculs sont reportés. Les profils verticaux de fraction volumique de la phase solide ainsi que de la contrainte normale (τ_{zz}) sont présentés pour différents instants sur la figure (Fig. III.15). Le profil de concentration expérimental à l'instant initial n'a pu être déterminé. Le premier point de mesure a donc été recalé dans le temps en imposant à la courbe de l'évolution temporelle de la lutocline expérimentale de passer par l'origine. La comparaison des profils de fraction volumique numérique et des profils expérimentaux confirme le bon comportement du modèle diphasique avec les hypothèses de la section 1.3.3 dans le cas de la sédimentation de particules sphériques non cohésives.

Les profils de contrainte normale obtenus par le modèle (Fig. III.15.b) sont caractérisés par un saut dans l'ordre de grandeur des contraintes. Celui-ci correspond à la position verticale de la lutocline au cours du temps (Fig. III.12.a). Au-dessus de ce saut les contraintes visqueuses sont assez faibles (10^{-5} Pa) alors qu'au-dessus elles avoisinent les 10^6 Pa. d'un côté il y a une suspension en cours de sédimentation et de l'autre il y a une suspension très concentrée de particules en contact les unes avec les autres, les mouvements y sont quasi nuls. Un comportement s'approchant d'un solide élastique semble y émerger. La viscosité y est très grande ($3 \cdot 10^{13}$ Pa.s) due à une valeur très grande du facteur d'amplification (Eq. I.31) comme le montre la figure (Fig. III.14).

En effet le facteur d'amplification diverge lorsque la fraction volumique de la phase solide approche de la fraction maximale ($\alpha_s^{max} = 0,6$), c'est-à-dire lorsque la distance interparticulaire tend vers zéro. Pour des raisons évidentes de calcul numérique nous avons limité l'écart entre α_s et α_s^{max} à 10^{-15} . Une valeur supérieure de cette limite ne permet pas le blocage au sein de la suspension concentrée et la fraction volumique peut dépasser la valeur maximale prescrite dans la relation (Eq. I.31).

La figure (Fig. III.13) représente l'évolution en fonction du temps de la conservation de la masse. Pour cette simulation nous obtenons une très bonne conservation de l'ordre de 10^{-9} en erreur relative.

Conclusion

La comparaison des résultats numériques sur l'évolution temporelle de la position verticale des interfaces et les profils de concentration avec des mesures expérimentales nous permet de montrer la capacité de l'approche développée à représenter le processus de sédimentation. Ces résultats sont particulièrement intéressants puisqu'ils sont obtenus dans des conditions de milieu dense.

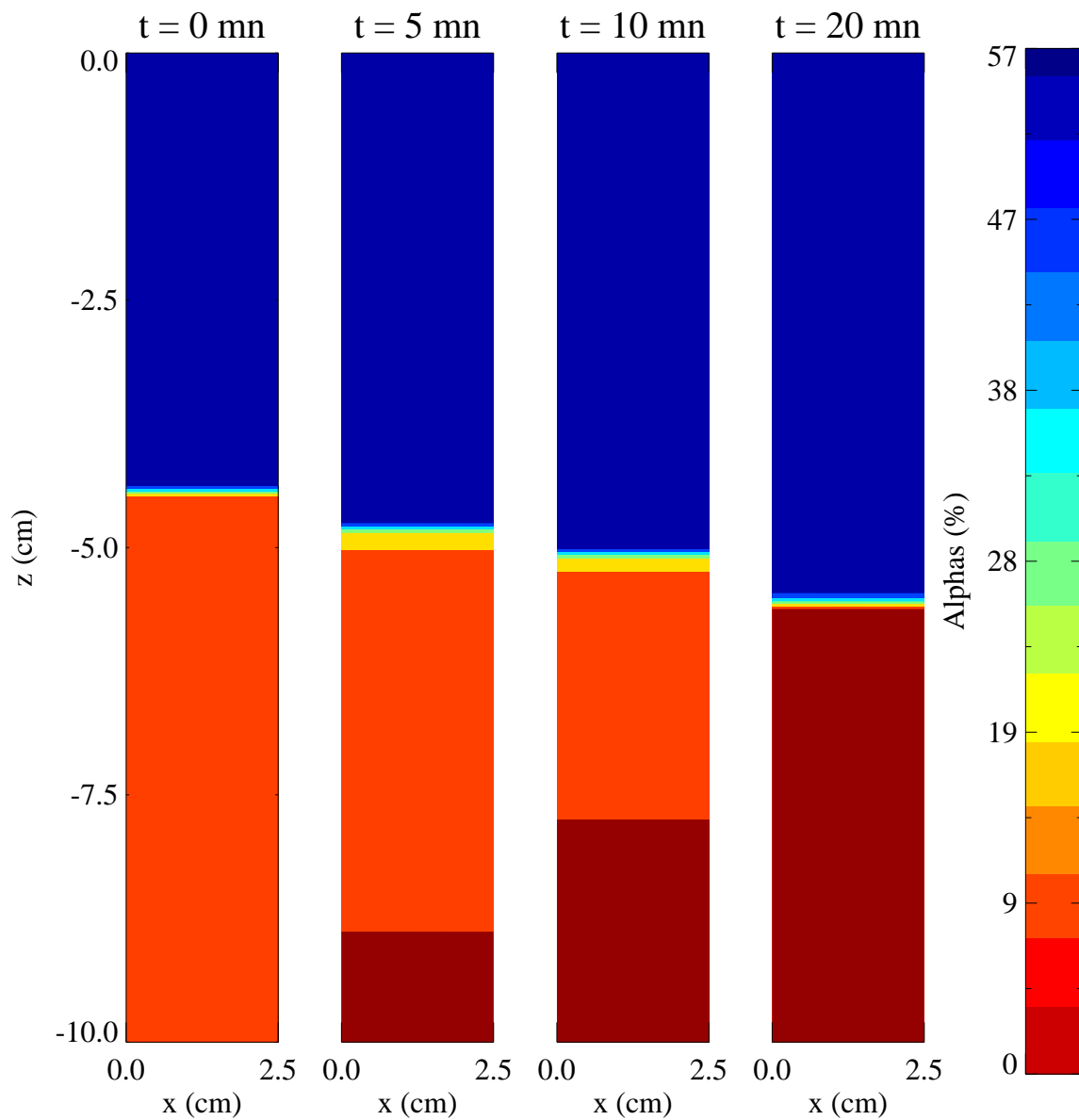


FIG. III.11 – Isocontours de fraction volumique obtenus par la simulation numérique.

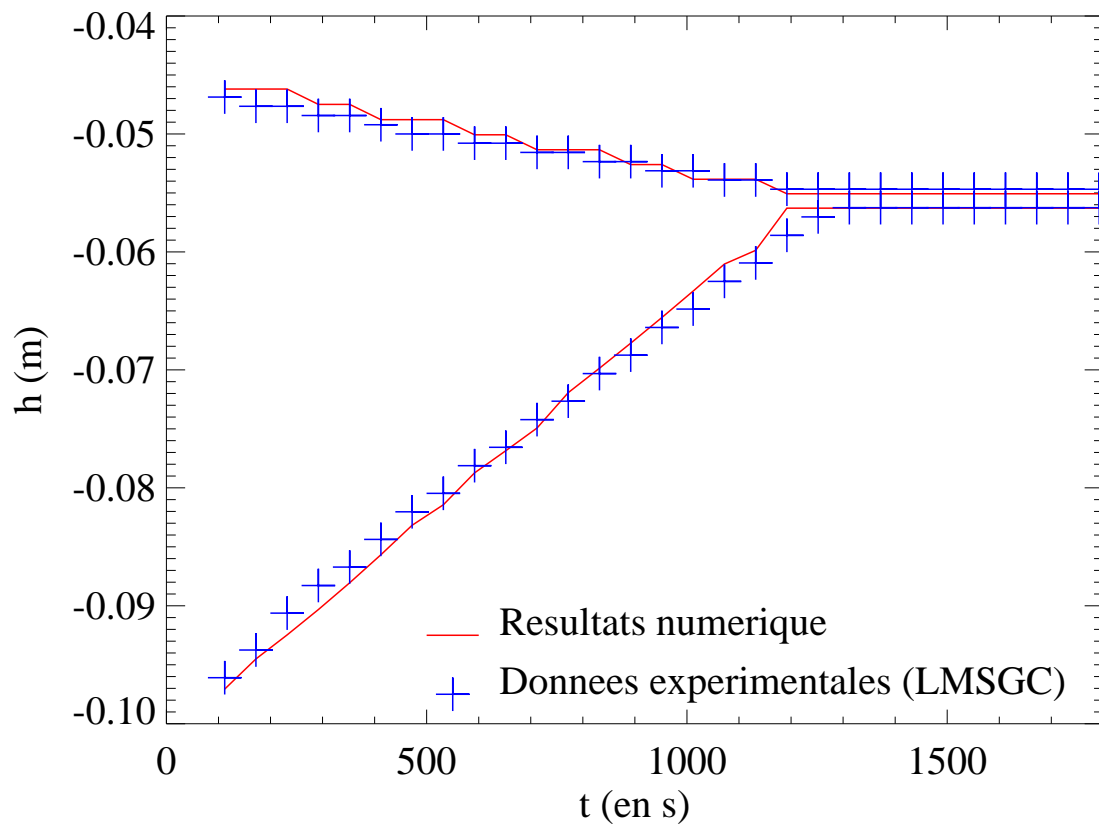


FIG. III.12 – Comparaison des résultats numériques avec les mesures expérimentales pour l'évolution temporelle de la position des interfaces dans la colonne.

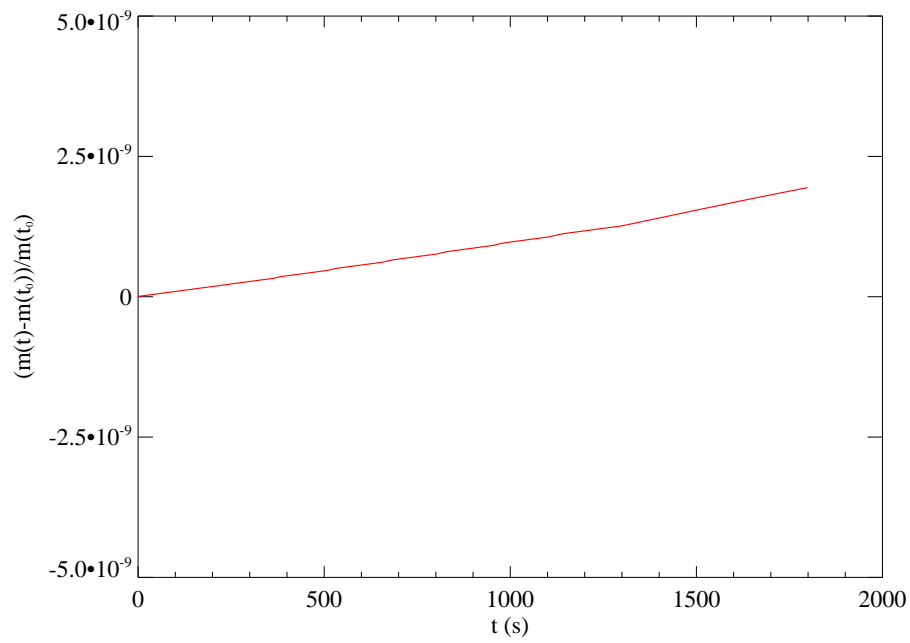


FIG. III.13 – Conservation de la masse.

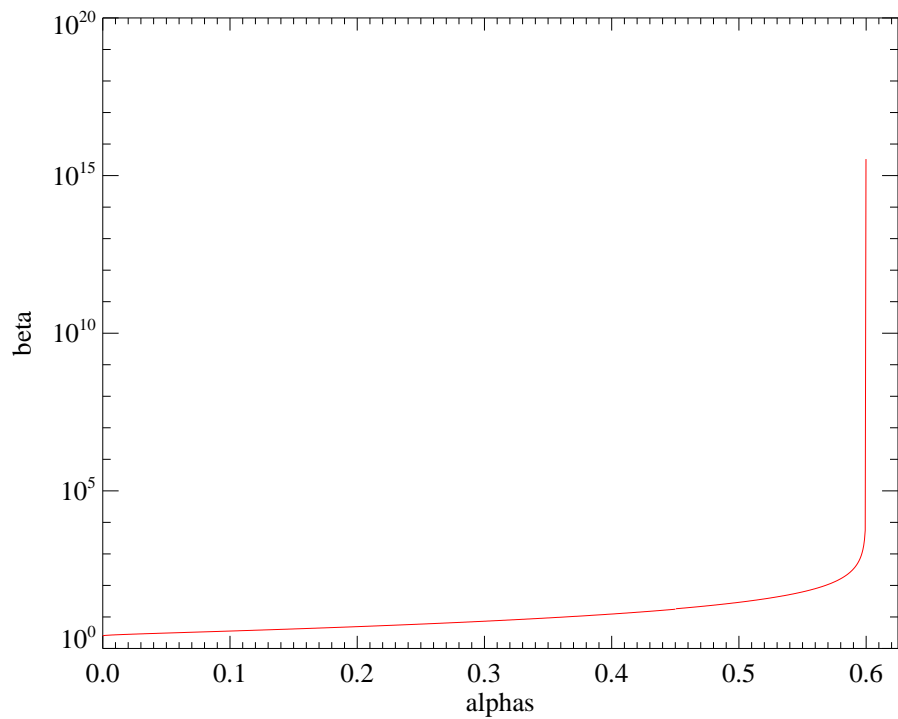


FIG. III.14 – Evolution du paramètre d'amplification de la viscosité en fonction de α_s .

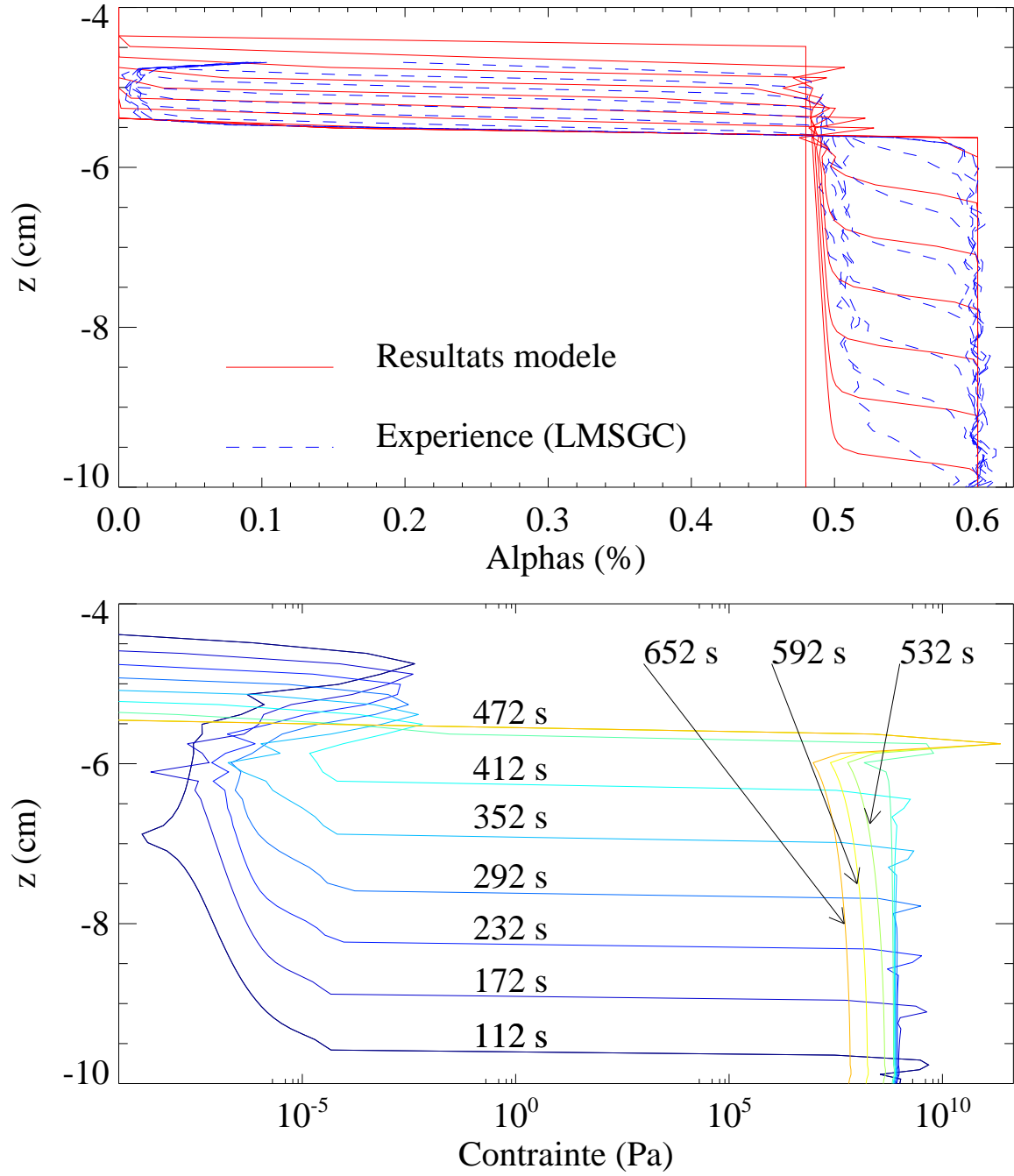


FIG. III.15 – Profils de fraction volumique (a) et de contrainte normale (b) à différents instants moyennés sur 16 profils échantillonnés toutes les 3 secondes. Comparaison avec les profils expérimentaux du LMSGC.

III.2.2 Cas d'une suspension de vase réelle

Nous avons ensuite étudié une suspension de vase réelle (vase de la Rance) pour laquelle nous disposons du suivi de la position de l'interface eau-claire/sédiment (Cf. III.2) en fonction du temps (*Thiébot and Guillou, 2006*). Les mesures ont été faites dans une colonne de sédimentation de 50 cm de hauteur, avec une concentration initiale de 50 g/l ($\rho_s=2537 \text{ kg.m}^{-3}$) dans de l'eau de mer ($\rho_f=1025 \text{ kg.m}^{-3}$, $\nu_f=1,073 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$). D'après l'analyse granulométrique de l'échantillon (Fig. III.16) il y a une population dominante centrée à 9 μm et une population secondaire à 35 μm , ainsi qu'une fraction importante de colloïdes.

Nous avons utilisé le même maillage que dans le cas précédent et un pas de temps de 1 s. La fraction volumique maximale est fixée à 0,1182 ce qui correspond à une concentration massique de 300 g.l^{-1} . Cette valeur de la concentration maximale correspond à celle de la vase de la Rance. Cette valeur de la fraction maximale est nettement inférieure à la valeur théorique pour des particules sphériques. Dans le cas d'une vase réelle, elle peut être assimilée au «point de gel», qui correspond à la structuration du fond sédimentaire. C'est la transition entre la sédimentation et la consolidation.

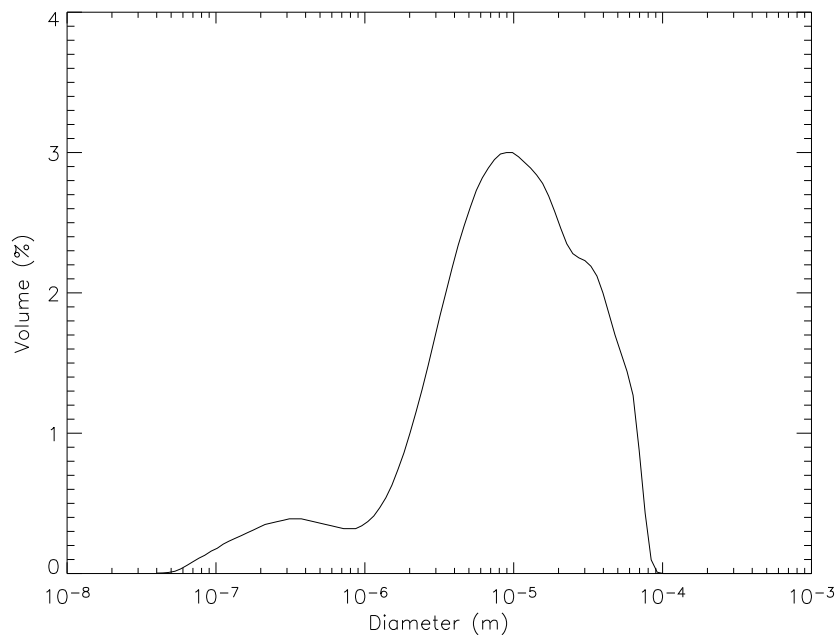


FIG. III.16 – Granulométrie de l'échantillon de vase réelle utilisé pour l'expérience de sédimentation (*Thiébot and Guillou, 2006*).

Résultats et discussion

Comme le montre la figure (Fig. III.17), l'interface eau-claire/sédiment s'arrête brusquement de descendre pour $h/h_0 = 0,16$, quelque soit le diamètre des particules utilisées pour la simulation. Les particules sont définies par un diamètre unique dans le modèle.

La sédimentation s'arrête lorsque les particules sont en contact, comme dans les cas des billes de polystyrène (Cf. III.2.1), ce qui explique l'arrêt brutal de la sédimentation dans les simulations numériques. Les résultats obtenus avec les cinq diamètres de particule (12, 16, 20, 25 et 35 μm) illustrent la forte dépendance du modèle au diamètre. Ceci met en évidence l'importance de l'étendue du spectre de taille des particules pour la simulation du transport des sédiments cohésifs.

Dans le cas des sédiments cohésifs lorsque la concentration augmente, les floes commencent à se gêner mutuellement dans leurs chute : cet effet est appelé chute entravée. Sur la courbe expérimentale ce phénomène est caractérisé par un ralentissement de la chute de l'interface à partir de 30 minutes. A partir d'une certaine concentration une structure continue apparaît au sein de la suspension (*Been and Sills, 1981*). Cette structure supporte en partie le poids des particules. Ceci a pour effet de diminuer la vitesse de sédimentation de la suspension. *Terzaghi (1936)* a proposé le concept de contrainte effective pour modéliser la contribution de la structuration à la contrainte normale du mélange (Cf. I.2.4.c)). D'autres processus peuvent influencer le phénomène de chute entravée comme la ségrégation des particules liée à l'existence d'une granulométrie étendue, les interactions fluide-particule sous forme d'interactions de traînée entre les particules ou bien le processus de floculation induit par les collisions interparticulaires et les interactions particule-particule d'origine électrochimique ou organique. Ce phénomène de chute entravée devra faire l'objet d'une étude plus approfondie pour déterminer une modélisation adaptée à l'approche diphasique du transport sédimentaire.

Les profils de concentration et de contrainte normale (Fig. III.18) montrent l'apparition d'un fond sédimentaire avec des concentrations de 300 $g.l^{-1}$. Comme nous l'avons observé dans le cas de la suspension de billes de polystyrène, la contrainte normale atteint des valeurs extrêmement fortes (10^6 Pa) dans le fond sédimentaire alors qu'elles sont très faibles dans la suspension (10^{-10} Pa). Les valeurs très importante de la contrainte dans le fond sédimentaire ont déjà été discuté dans le cas-test précédent (Cf. III.2.1) et devront également faire l'objet d'un approfondissement.

La figure (Fig. III.19) représente l'évolution en fonction du temps de la conservation de la masse pour les différentes simulations réalisées. Cette figure montre que la précision avec laquelle la masse est conservée dépend du diamètre des particules, elle varie entre 10^{-7} et 10^{-6} . Plus les particules sont petites plus le temps de relaxation τ_{fs} est petit et donc plus le couplage entre les équations de conservation de la quantité de mouvement pour les deux phases est fort. Il y aurait donc une diminution de la précision avec l'augmentation de la taille des particules.

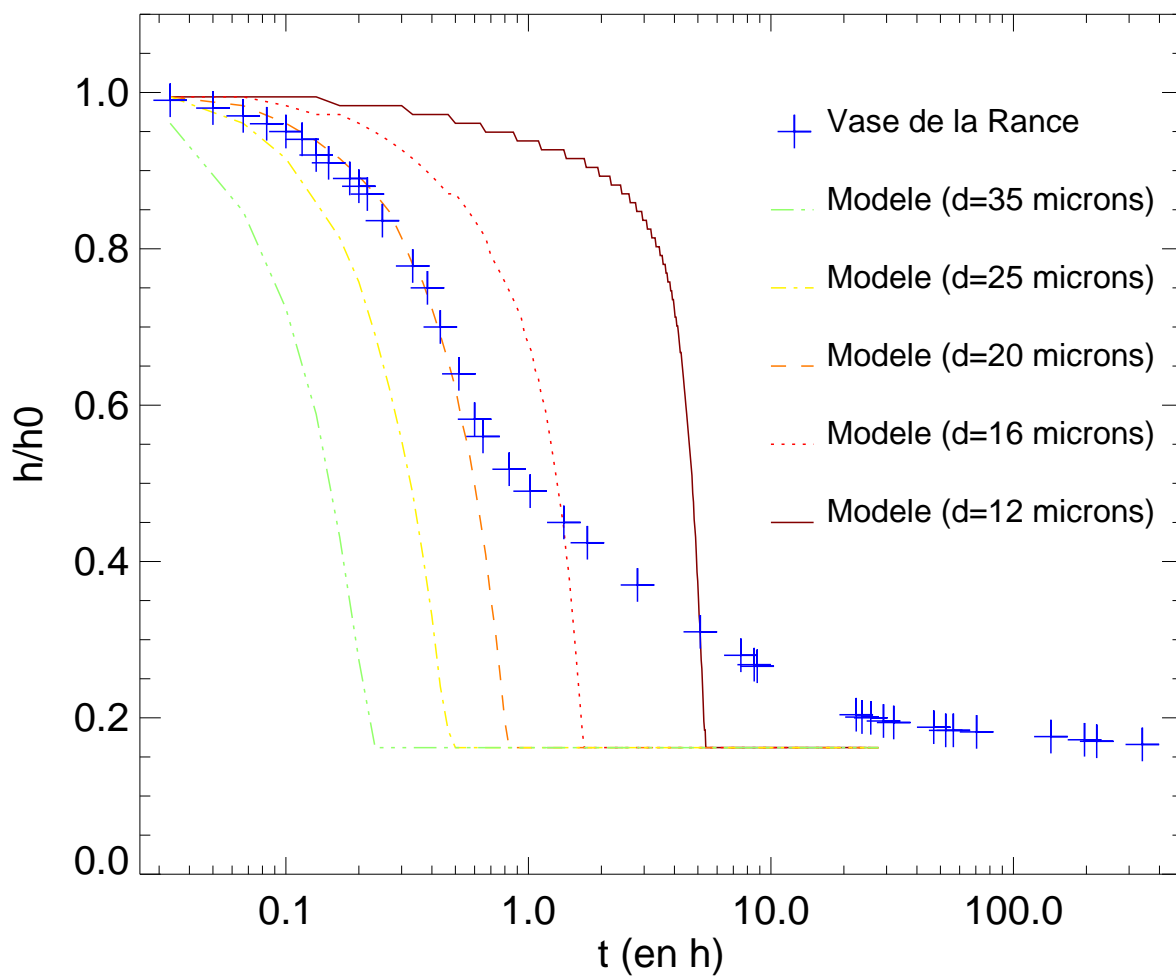


FIG. III.17 – Evolution temporelle de la position de l'interface eau claire-sédiment.

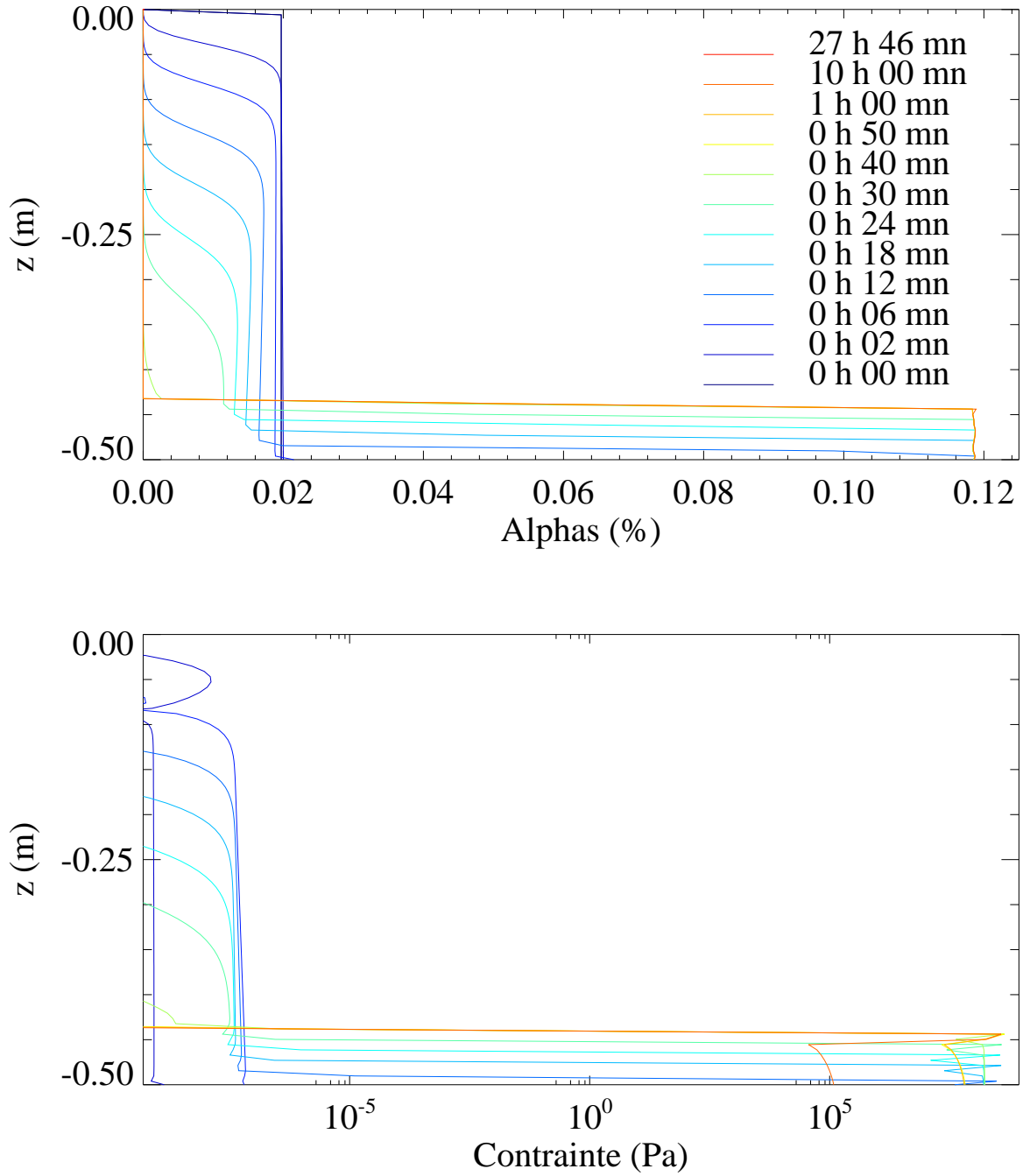


FIG. III.18 – Profils de concentration (a) et de contrainte normale (b) à différents instants pour les particules de diamètre $20 \mu\text{m}$.

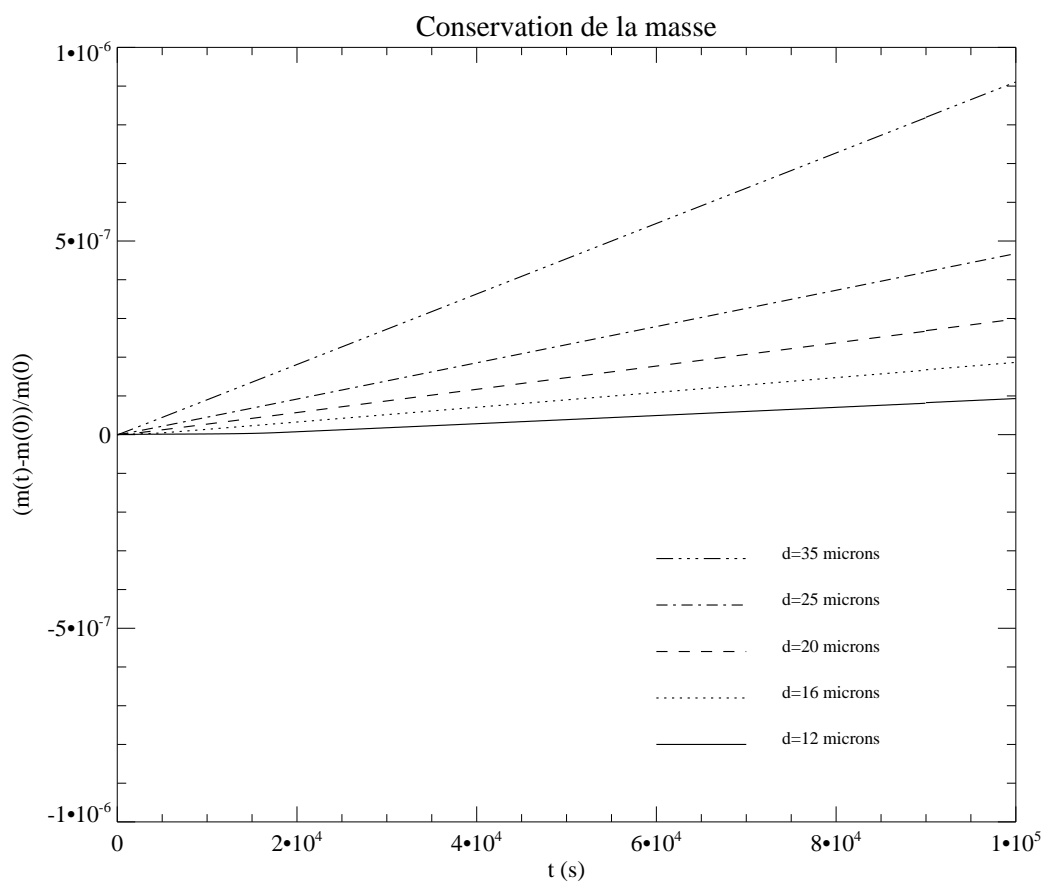


FIG. III.19 – Conservation de la masse.

III.2.3 Conclusion

Les résultats que nous avons obtenus montrent que l'approche diphasique proposée est consistante avec le phénomène de sédimentation. L'hypothèse faite de ne considérer que la force de traînée dans les équations du modèle est donc ici validée. Dans la suspension concentrée, c'est la contrainte normale qui devient prépondérante et assure le blocage de la suspension lorsque la fraction volumique approche de sa valeur maximale. Les valeurs fortes de la contrainte normale en-dessous de la lutocline sont liées directement à la valeur à laquelle on limite la différence entre α_s et α_s^{max} pour le calcul du facteur d'amplification (β). Ces valeurs sont donc à prendre avec beaucoup de prudence et une comparaison avec des mesures expérimentales devra être menée. L'introduction de lois rhéologiques complexes sera nécessaire pour modéliser la structuration du dépôt sédimentaire et représenter le processus de tassement et de consolidation.

Le diamètre des particules est un paramètre essentiel de la simulation. Nous avons illustré ce propos en montrant la grande sensibilité du modèle au diamètre des particules dans le cas de la sédimentation d'une vase réelle. Ceci confirme l'importance de la polydispersion de la taille d'un échantillon. Il apparaît clairement ici qu'une description basée sur un diamètre moyen, constant dans l'espace et le temps, n'est pas adaptée à la modélisation de la sédimentation d'un matériel cohésif. Le processus de floculation devra être pris en compte dans les équations du modèle par la suite et une proposition sera faite à la fin de ce chapitre.

III.3 Simulation de la dispersion de particules en écoulement dilué pleinement turbulent

Nous nous intéressons ici à la simulation du transport en suspension de particules sédimentaires non-cohésives en milieu dilué et en écoulement pleinement turbulent (*Chauchat et al.*, 2007c,b). Pour cela nous nous appuyons sur les expériences de *Muste et al.* (2005).

III.3.1 Présentation

Les mesures de *Muste et al.* (2005) ont été réalisées dans un canal inclinable à recirculation de 6 mètres de longueur (L) et 15 centimètres de largeur (B) (Fig. III.20). Le fond du canal est constitué d'un métal lisse et les parois verticales sont en verre. Une structure en nid d'abeilles à l'entrée du canal permet de faciliter le développement rapide de la turbulence, de minimiser l'entraînement d'air et de favoriser l'uniformité de l'écoulement. Le débit a été choisi afin d'assurer une suspension totale des particules ($U_m \approx 1 \text{ m.s}^{-1}$ et $Re = 2.10^4$). La pente du canal est imposée à 1,13% pour toutes les expériences. Le rapport d'aspect est grand $B/H = 7,5$ afin de limiter les effets d'écoulement secondaire. Les mesures sont effectuées à 5,3 m de l'entrée du canal.

Les auteurs ont réalisé deux séries d'expériences, l'une avec des particules naturelles (NS : Natural Sand ; $\rho_s = 2650 \text{ kg.m}^{-3}$) et l'autre avec des particules en nylon (NBS : Neutrally Buoyant Sediment ; $\rho_s = 1025 \text{ kg.m}^{-3}$), dans les deux cas le diamètre des particules est de $230 \pm 20 \mu\text{m}$. Pour chaque série, différentes concentrations volumiques ont été réalisées entre 5.10^{-4} et $1,6.10^{-3}$. Les mesures sont réalisées par des méthodes de traitement d'images, Vélocimétrie par Image de Particules⁶ et Vélocimétrie par suivi de Particules⁷.

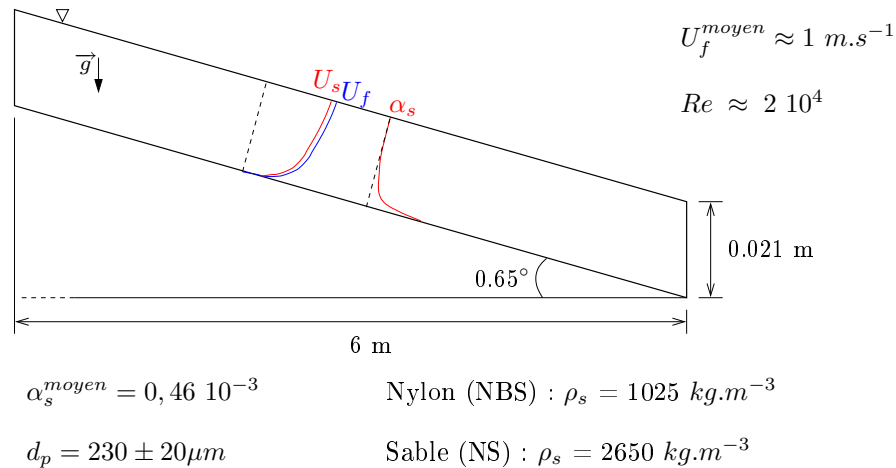


FIG. III.20 – Configuration expérimentale de *Muste et al.* (2005).

⁶PIV : Particle Image Velocimetry

⁷PTV : Particle-Tracking Velocimetry

Nous avons réalisé des simulations avec un maillage constitué de 81 mailles sur l'horizontale et de 61 mailles sur la verticale avec un raffinement près du fond. Une condition initiale au repos est imposée pour l'hydrodynamique. Une condition limite de type Neumann est imposée sur la vitesse et l'élévation de surface libre est fixée à zéro à l'amont. A la sortie du canal, une condition de radiation est imposée sur l'élévation de surface libre et une condition de Neumann sur la vitesse.

Au fond une condition d'adhérence est imposée sur la vitesse de la phase fluide. Pour la vitesse horizontale de la phase solide, une condition de glissement est imposée. En effet, la condition d'adhérence pour les particules n'est pas justifiée. Ceci a été montré par des mesures expérimentales par différents auteurs (*Sumer and Deigaard, 1981; Kaftori et al., 1996; Kiger and Pan, 2002*). Le tableau (Tab. III.3) récapitule les conditions aux limites pour ces simulations. Pour les modèles de turbulence, les conditions aux limites au fond et à la surface libre sont imposées comme présentées dans l'équation (Eq. III.3). Le modèle k_ε à deux couches présentées au chapitre II est utilisé ici pour représenter les caractéristiques de la turbulence en proche paroi. Pour les simulations présentées dans cette section le pas de temps est de 10^{-3} s. Pour ces simulations nous avons utilisé la formule de *Haider and Levenspiel (1989)* pour le coefficient de traînée avec une valeur du facteur de forme $\psi = 0,6$. Cette valeur a été justifiée au chapitre II.2.2 en comparaison avec la formule de *Dietrich (1982)* pour la vitesse de chute de particules naturelles.

$$\begin{aligned} \text{A la surface libre : } \quad & \frac{\partial k_f}{\partial z} = \frac{\partial \varepsilon_f}{\partial z} = \frac{\partial k_s}{\partial z} = \frac{\partial k_{fs}}{\partial z} = 0 \\ \text{Au fond : } \quad & \frac{\partial k_f}{\partial z} = \frac{\partial \varepsilon_f}{\partial z} = \frac{\partial k_s}{\partial z} = \frac{\partial k_{fs}}{\partial z} = 0 \end{aligned} \tag{III.3}$$

ϕ désigne une quantité scalaire quelconque et l'indice k prend les valeurs f ou s respectivement pour la phase fluide ou solide.

III.3.2 Résultats et discussion

Dans un premier temps nous comparons les résultats du modèle avec une expérience en eau claire, *i.e.* : $\alpha_s = 0$. Cette première expérience sert à calibrer le modèle et permet d'obtenir une condition initiale pour les simulations suivantes avec particules.

La comparaison des profils de vitesse calculés et expérimentaux (Fig. III.21-a) montre une bonne concordance. Sur les grandeurs turbulentes, le profil calculé pour la contrainte de Reynolds (Fig. III.21-b) est assez proche des mesures de *Muste et al. (2005)* bien que sensiblement supérieur.

Sur les figures (Fig. III.21-c et d) sont représentés les profils de contrainte turbulente horizontale et verticale. D'après les mesures, la contrainte turbulente horizontale est cinq fois plus forte que la contrainte turbulente verticale. Leurs profils sont également assez

	Ouest	Est	Fond
η	$\eta = 0$	$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \sqrt{g \cdot H} \frac{\partial \eta}{\partial n} = 0$	
u_f	$\frac{\partial u_f}{\partial n} = 0$	$\frac{\partial u_f}{\partial n} = 0$	$u_f = 0$
u_s	$\frac{\partial u_s}{\partial n} = 0$	$\frac{\partial u_s}{\partial n} = 0$	$\frac{\partial u_s}{\partial n} = 0$
w_k	$\frac{\partial w_k}{\partial n} = 0$	$\frac{\partial w_k}{\partial n} = 0$	$w_k = 0$
α_s	$\alpha_s = 0,46 \cdot 10^{-3}$	$\frac{\partial \alpha_s}{\partial n} = 0$	$\frac{\partial \alpha_s}{\partial n} = 0$
ϕ	$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$	$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$	

TAB. III.3 – Conditions aux limites.

différents, révélant le caractère anisotrope de la turbulence pour cet écoulement. L'utilisation d'un modèle $k - \varepsilon$ pour la fermeture turbulente implique l'isotropie de la turbulence et donc l'égalité des contraintes horizontale et verticale, ce que l'on retrouve sur les figures (Fig. III.21-c et d). L'ordre de grandeur de la contrainte turbulente normale est sous-estimée sur la composante horizontale et surestimée sur la composante verticale.

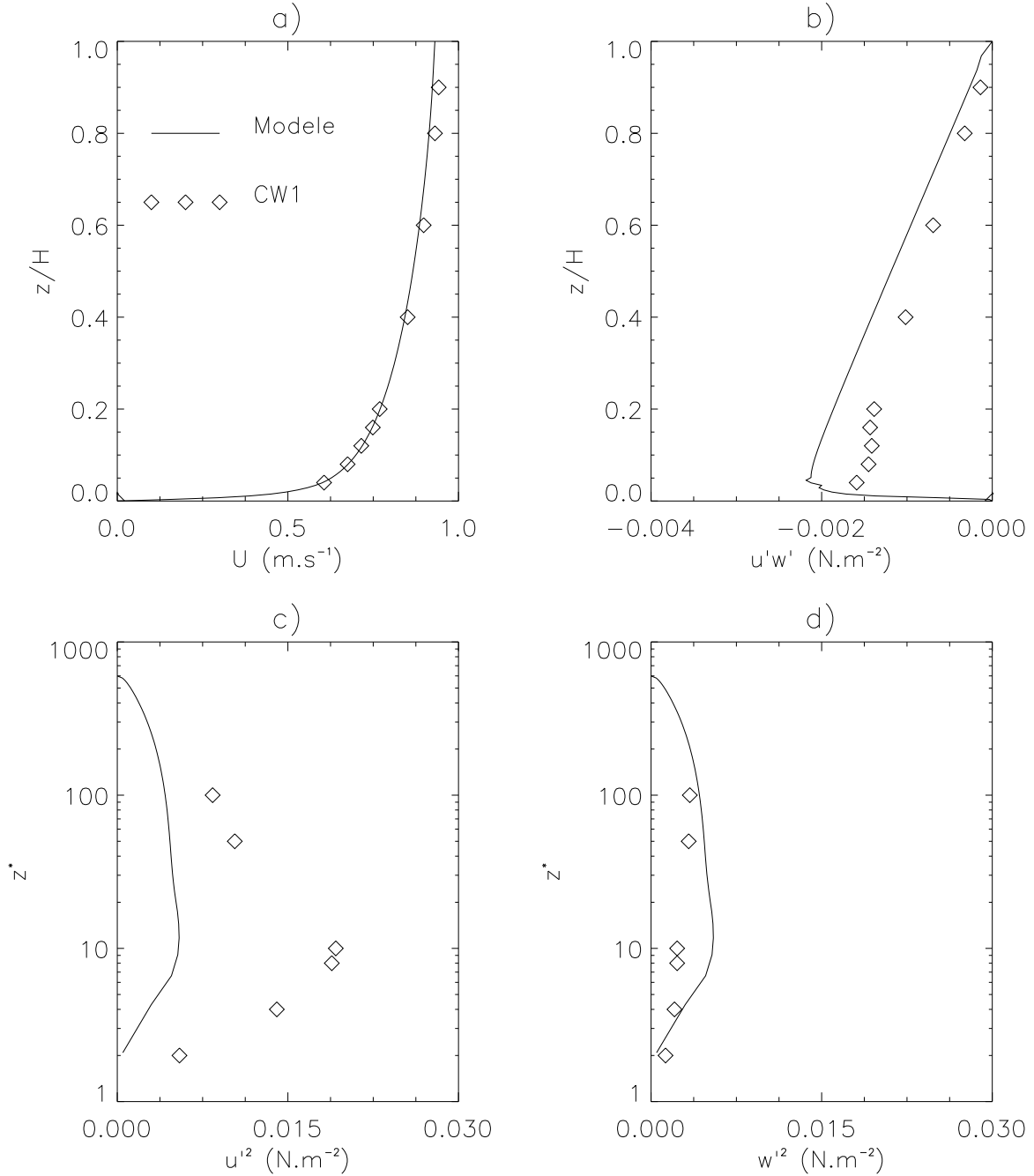


FIG. III.21 – Profils de vitesse (a), de contrainte de Reynolds (b) et de contraintes normales horizontale (c) et verticale (d) en eau claire.

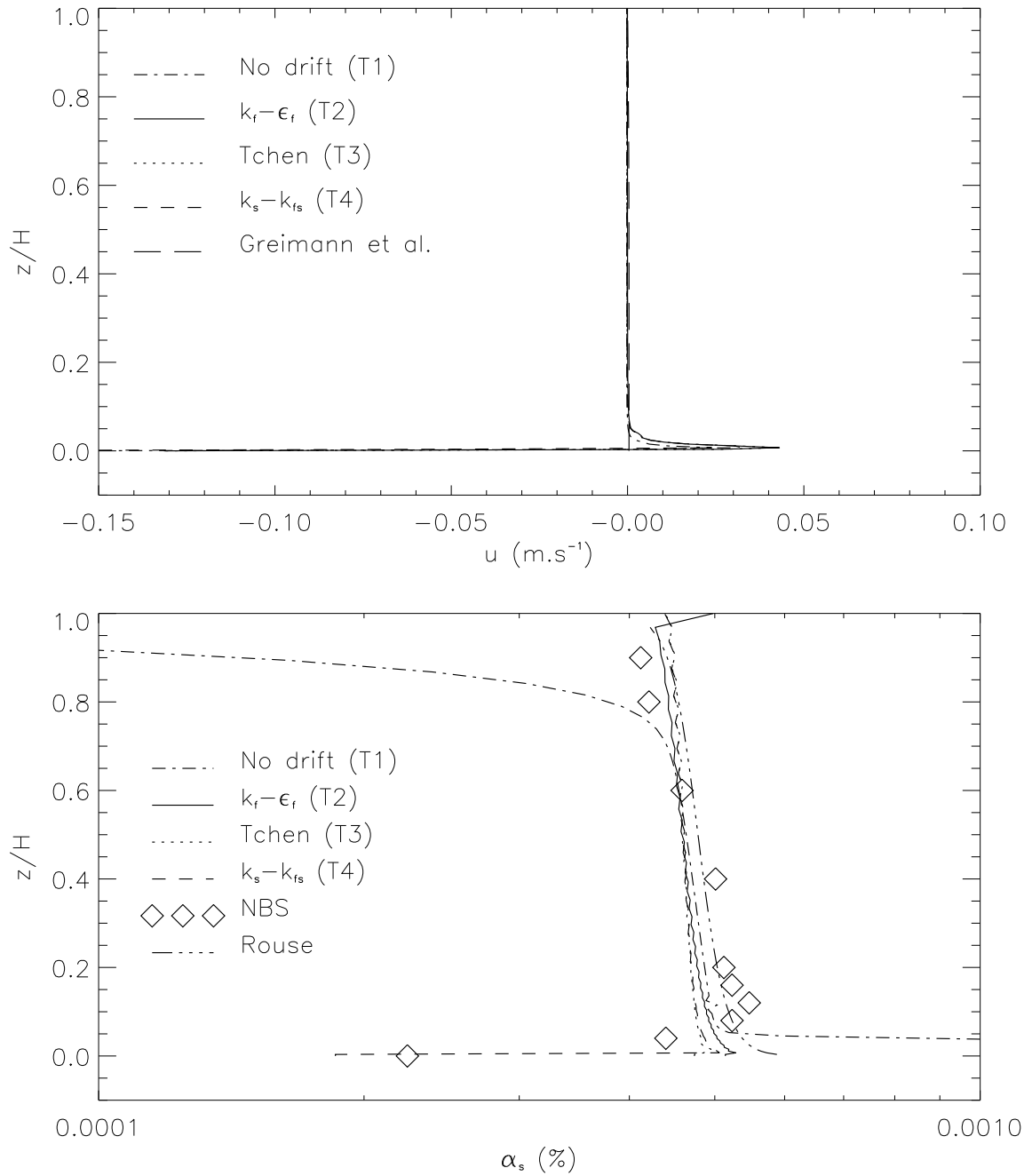


FIG. III.22 – Comparaison des résultats du modèle diphasique avec 4 modélisations de la turbulence (T1, T2, T3 et T4) avec les mesures de [Muste et al. \(2005\)](#) et les profils analytiques de [Greimann et al. \(1999\)](#) et [Rouse \(1937\)](#) pour le cas NBS1. Figure supérieure : profils du défaut de vitesse entre les phases ($u_{lag} = u_f - u_s$). Figure inférieure : profils de fraction volumique solide.

Dans un second temps, nous avons réalisé des simulations avec particules en imposant un profil de concentration volumique à la frontière Ouest du domaine $\alpha_s^{moyen} = 0,46.10^{-3}$

ce qui correspond au cas NBS1 et NS1 présenté par *Muste et al.* (2005).

Nous avons réalisé quatre simulations avec différentes hypothèses pour la modélisation de la turbulence (Cf. II.3.4) :

- T1 : sans modélisation de la dispersion ;
- T2 : en faisant l'hypothèse $\langle \vec{u}'_f \otimes \vec{u}'_s \rangle = \langle \vec{u}'_f \otimes \vec{u}'_f \rangle$;
- T3 : modèle basé sur la théorie de *Tchen* (1947) ;
- T4 : modèle basé sur la théorie cinétique des milieux granulaires $k_s - k_{fs}$.

D'après la littérature, le coefficient C_β diffère suivant la direction par rapport à l'écoulement relatif moyen. Lorsque l'écoulement est perpendiculaire à l'écoulement relatif moyen, la valeur de $C_\beta = 1,8$ est préconisée, alors que dans la direction parallèle une valeur de $C_\beta = 0,45$ a été proposée. Ces valeurs ont été obtenues par *Deutsch and Simonin* (1991) à partir des résultats expérimentaux de *Wells and Stock* (1983). Nous avons donc différencié les temps caractéristiques suivant les directions horizontale et verticale en prenant la valeur adaptée du coefficient C_β dans le calcul du tenseur de dispersion. Nous avons choisi une valeur de 1,8 lorsque les directions ne peuvent être différenciées.

D'après *Greimann et al.* (1999) la différence de vitesse entre les phases solide et fluide est de l'ordre de la vitesse de chute des particules. Dans le cas NBS1 celle-ci est très faible $w_{fall} \approx 6.10^{-4} m.s^{-1}$ et le défaut de vitesse est donc négligeable. Ceci est obtenu numériquement comme le montre la figure (Fig. III.22). La valeur négative au fond s'explique par la condition de glissement imposée sur la vitesse horizontale de la phase solide. Celle-ci traduit le fait que les particules n'adhèrent pas à la paroi comme le ferait un fluide visqueux. La présence d'un pic positif près du fond ne provient certainement pas du modèle de dispersion, celui-ci étant présent pour les quatre simulations y compris celle sans modélisation de la dispersion.

Sur les profils de concentration (Fig. III.22) nous avons représenté les points de mesure et les solutions analytiques de *Rouse* (1937) et de *Greimann et al.* (1999). La simulation sans vitesse de dérive montre une interface entre la suspension et le fond. Il y a eu un dépôt important et une diminution de la concentration en particules à proximité de la surface libre. Ceci est en contradiction avec les mesures et les profils analytiques. En effet, dans l'expérience les particules sont maintenues en suspension sur toute la colonne d'eau et le gradient vertical de concentration est très faible. Sur les simulations avec modélisation de la dispersion turbulente le profil de concentration est beaucoup plus proche des mesures et de la solution analytique de *Rouse* (1937). L'écart entre les différents modèles de turbulence est peu important et nous obtenons globalement un accord correct avec l'expérience. Notons toutefois que des oscillations apparaissent sur le profil de concentration obtenu en faisant l'hypothèse T2 : $\langle \vec{u}'_f \otimes \vec{u}'_s \rangle = \langle \vec{u}'_f \otimes \vec{u}'_f \rangle$. La concentration à la surface libre est supérieure à la concentration dans la colonne de mélange eau-particule. La dispersion verticale est trop forte et les particules s'accumulent à la surface.

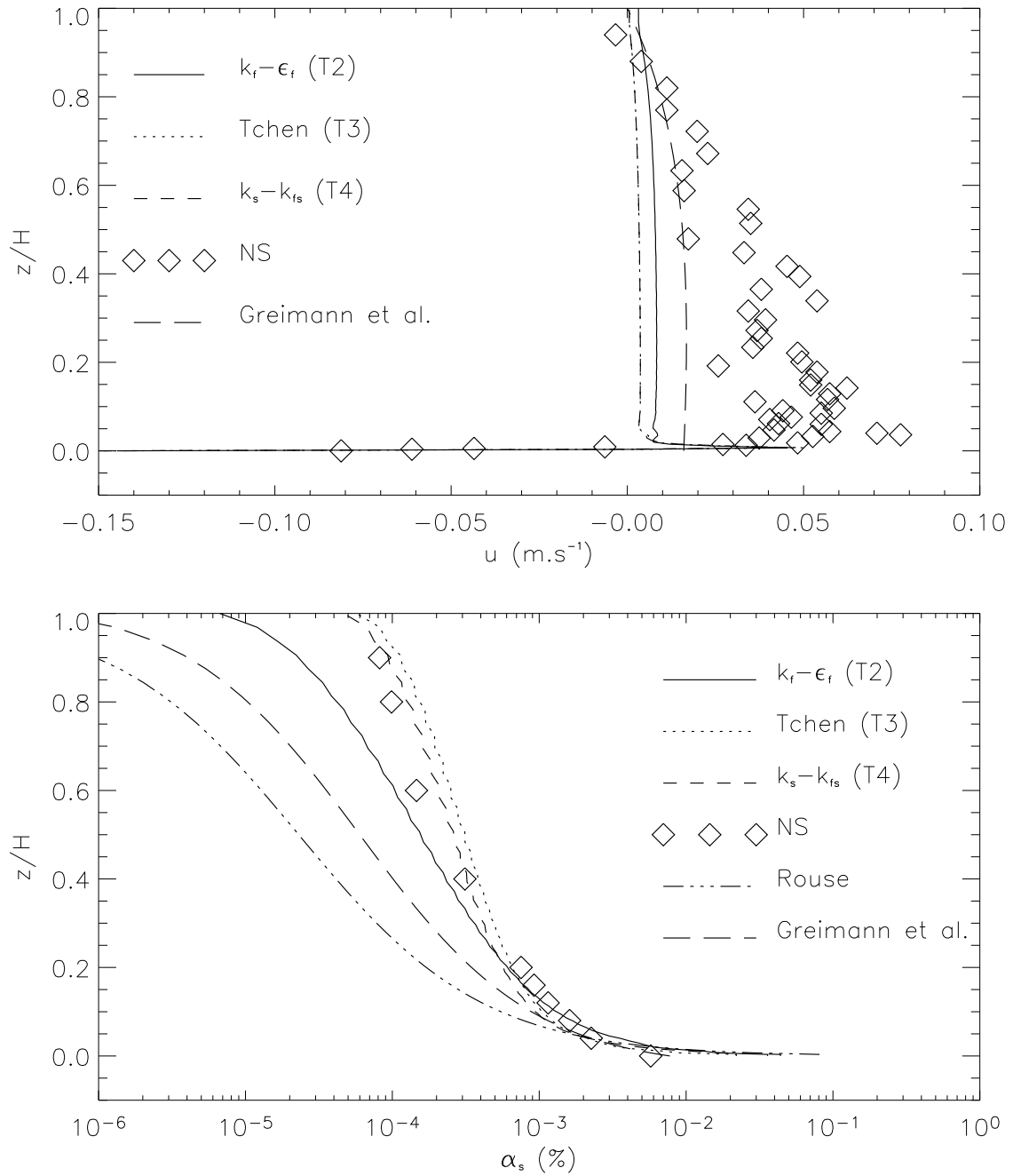


FIG. III.23 – Comparaison des résultats du modèle diphasique avec 4 modélisations de la turbulence (T1, T2, T3 et T4) avec les mesures de [Muste et al. \(2005\)](#) et les profils analytiques de [Greimann et al. \(1999\)](#) et [Rouse \(1937\)](#) pour le cas NS1. Figure supérieure : profils du défaut de vitesse entre les phases ($u_{lag} = u_f - u_s$). Figure inférieure : profils de fraction volumique solide.

La figure (Fig. III.23) montre le défaut de vitesse entre les phases fluide et solide et le profil de concentration pour le cas NS1. Nous avons réalisé 3 simulations avec les

hypothèses T2, T3 et T4 pour modéliser la turbulence. La simulation sans modèle de dispersion n'est pas montrée ici étant donné les résultats obtenus dans le cas précédent (NBS1).

Le profil du défaut de vitesse entre les phases n'est pas nul dans ce cas. Nous comparons les résultats numériques avec les mesures obtenues par *Muste et al. (2005)* ainsi que la solution analytique proposée par *Greimann et al. (1999)*. Les mesures de *Muste et al. (2005)* montrent que le défaut de vitesse de la phase solide est deux fois plus important que l'estimation fournie par *Greimann et al. (1999)*. La vitesse des sédiments est inférieure à celle du fluide excepté à proximité du fond. Nous avons discuté de ce point dans le cas NBS1. Ce défaut de vitesse entre les phases se propage dans la colonne d'eau en perdant de l'amplitude. Cette évolution en fonction de la profondeur est prédite numériquement, bien que l'ordre de grandeur du défaut de vitesse entre les phases soit inférieur aux mesures et à la solution analytique. Les profils obtenus numériquement avec les hypothèses T3 et T4 sont très proches l'un de l'autre et sont inférieurs au profil obtenu avec l'hypothèse T2 qui prédit un défaut de vitesse horizontale plus important. Le processus physique est qualitativement reproduit bien que sous-estimé. Les écarts entre les mesures de *Muste et al. (2005)* et la solution analytique de *Greimann et al. (1999)* mettent en évidence la nécessité d'un approfondissement théorique.

Un point important à souligner réside dans la modélisation du tenseur de dispersion. En effet, *Greimann et al. (1999)* ont montré que $u_f - u_s = -u_d + o(u_d)$ et les mesures réalisées par *Muste et al. (2005)* notamment, prouvent que cette différence de vitesse est positive, exception faite d'une couche limite où les particules solides ne sont pas contraintes d'adhérer à la paroi comme le fluide. Nous pouvons donc en déduire que la vitesse de dérive horizontale est négative. L'analyse du terme de dispersion nous montre que le coefficient de dispersion doit être considéré sous la forme d'un tenseur. Analysons le terme de vitesse de dérive horizontale : le gradient de fraction volumique de la phase solide est négatif et l'expression de la vitesse de dérive horizontale est la suivante : $u_d = -D_{fs,xz}^t \frac{\partial \alpha_s}{\partial z}$. Dès lors il est clair que le coefficient de dispersion $D_{fs,xz}^t$ doit être négatif pour reproduire le processus physique observé. C'est le cas si on considère le terme $\langle u'_f w'_s \rangle_s$ du tenseur de la covariance des fluctuations de vitesse fluide-particule, qui est négatif, pour estimer le coefficient de dispersion $D_{fs,xz}^t$. Mais ce n'est pas le cas si on fait l'hypothèse isotrope : $\overline{\overline{D_{fs}^t}} = \nu_{fs}^t \overline{\overline{I}}$. Le tenseur de dispersion $\overline{\overline{D_{fs}^t}}$ doit donc être calculé en fonction du tenseur de la covariance des fluctuations de vitesse fluide-particule en suivant l'approximation de Boussinesq (Eq. II.123).

Sur le graphe inférieur de la figure (Fig. III.23) nous avons représenté les profils de concentration obtenus avec les différents modèles de turbulence ainsi que les profils analytiques de *Rouse (1937)* et de *Greimann et al. (1999)*. Les profils de fraction volumique (α_s) obtenus avec les hypothèses T3 et T4 sont très proches l'un de l'autre et sont en accord avec les mesures de *Muste et al. (2005)*. Le profil de fraction volumique (α_s) prédit avec l'hypothèse T2 est plus éloigné des mesures dans la partie supérieure de l'écoulement ($z/h > 0,5$).

Dans tous les cas, la valeur de la fraction volumique près du fond est nettement su-

périeure aux mesures. Un dépôt se forme qui n'est pas observé expérimentalement. Le traitement du fond constitue une difficulté majeure pour la modélisation du transport sédimentaire. Dans l'approche diphasique, celle-ci a été mentionnée par différents auteurs ([Greimann et al., 1999](#); [Greimann and Holly, 2001](#); [Hsu et al., 2003](#); [Amoudry et al., 2005](#)). Les solutions proposées consistent à imposer une concentration de référence à quelques diamètres au-dessus du fond ([Greimann et al., 1999](#)) ou à introduire un terme de flux dans l'équation de conservation de la masse ([Hsu et al., 2003](#)) lorsque les équations sont résolues numériquement. Dans notre approche, une condition d'imperméabilité est simplement imposée au fond ($\frac{\partial \alpha_s}{\partial z}$). Nous avons également testé les solutions évoquées précédemment mais elles n'ont pas eu d'effets significatifs sur les résultats et sont plus restrictives.

Afin d'illustrer l'effet de la forme des particules nous avons réalisé une simulation avec un facteur de forme $\Psi = 1$ (particule sphérique) (Fig. [III.24](#)). Le profil de fraction volumique est nettement affecté par la valeur du facteur de forme, le maintien en suspension des particules est diminué et le profil prédit s'écarte des mesures et se rapproche du profil de [Greimann et al. \(1999\)](#).

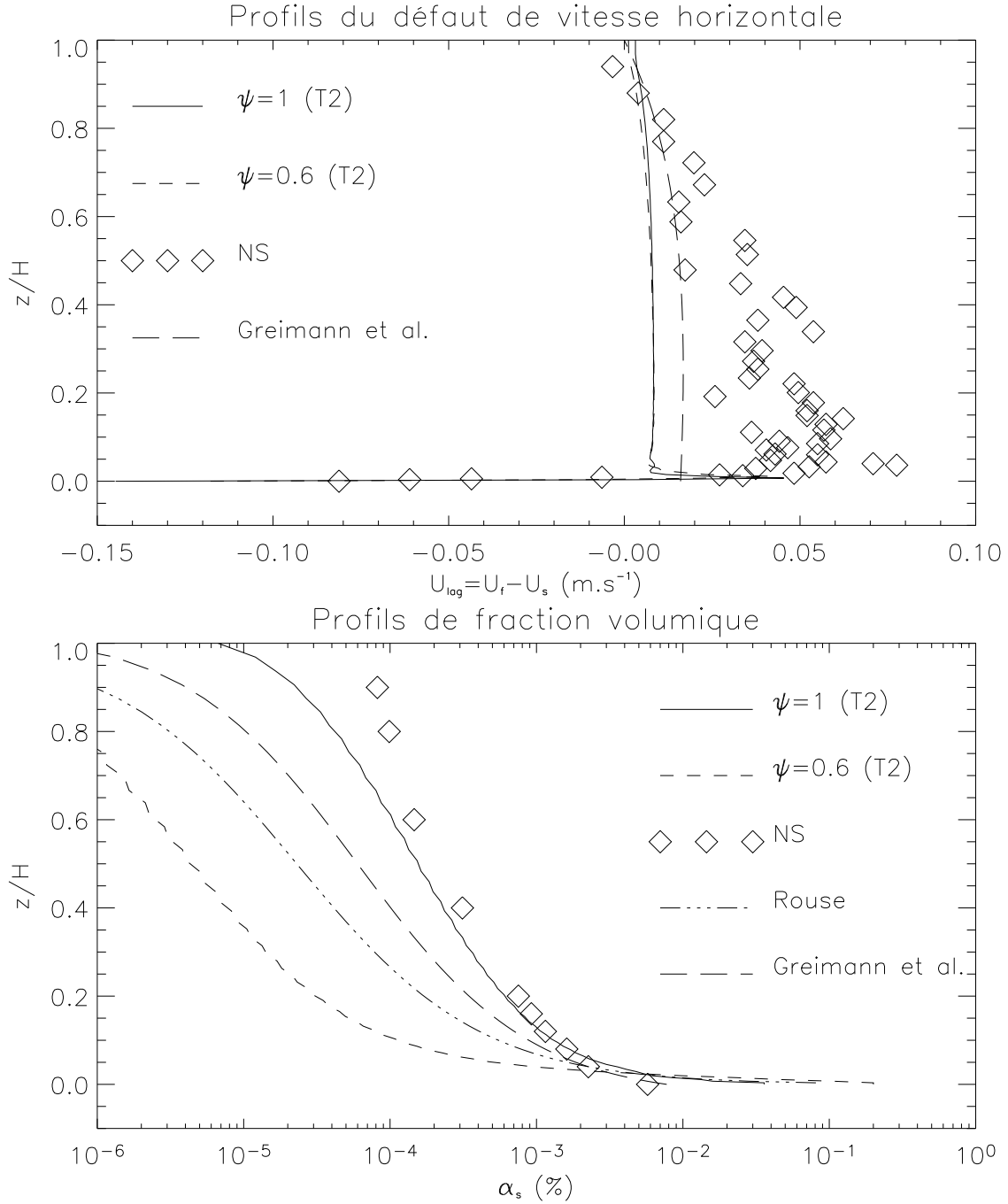


FIG. III.24 – Comparaison des résultats du modèle diphasique avec le modèle $k_f - \varepsilon_f$ (T2) avec les mesures de [Muste et al. \(2005\)](#) et les profils analytiques de [Greimann et al. \(1999\)](#) et [Rouse \(1937\)](#) pour le cas NS1 - Sensibilité au facteur de forme ψ . Figure supérieure : profils du défaut de vitesse entre les phases ($u_{lag} = u_f - u_s$). Figure inférieure : profils de fraction volumique solide.

$\Delta_r k_f$ en %	$k_f - \varepsilon_f$	Tchen	$k_s - k_{fs}$
NS	1,35	-0,18	-1,55

TAB. III.4 – Variation de l'énergie cinétique turbulente du fluide dans le cas des particules NS.

Les figures (Fig. III.25 et III.26) présentent les profils d'énergie cinétique turbulente du fluide pour chacun des cas NBS1 et NS1 obtenus avec les différents modèles. Dans le cas NBS1 la présence des particules n'affecte pas la turbulence au sein de la phase fluide. Par contre dans le cas NS1 l'énergie cinétique turbulente du fluide est atténuée par la présence des particules de manière significative. L'atténuation de l'énergie cinétique turbulente simulée numériquement est obtenue en calculant l'écart relatif entre les valeurs maximales des profils en présence de particules et en eau claire. Les résultats sont synthétisés dans le tableau TAB. III.4. La simulation réalisée sans modèle de turbulence pour la phase solide est en désaccord avec la théorie et les mesures expérimentales, puisqu'une augmentation de l'énergie cinétique turbulente du fluide est simulée numériquement. Une atténuation non négligeable de l'énergie cinétique turbulente de la phase fluide est obtenue sur les simulations avec un modèle de turbulence pour la phase solide. D'après *Muste et al. (2005)* on peut estimer que l'atténuation de l'énergie cinétique turbulente est de l'ordre de 3% ce qui tend à montrer que dans ce cas le modèle $k_s - k_{fs}$ est le plus pertinent.

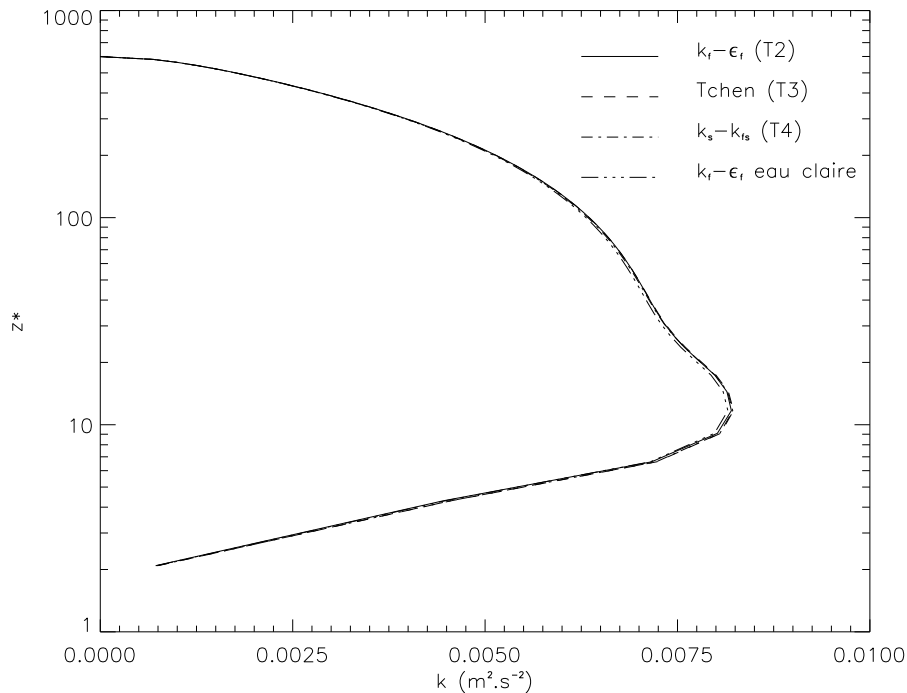


FIG. III.25 – Comparaison des profils d'énergie cinétique du fluide simulés par le modèle diphasique avec 4 modélisations de la turbulence (T1, T2, T3 et T4) pour le cas NBS1.

En se basant sur la classification proposée par *Elgobashi and Truesdell (1993)* (Cf.

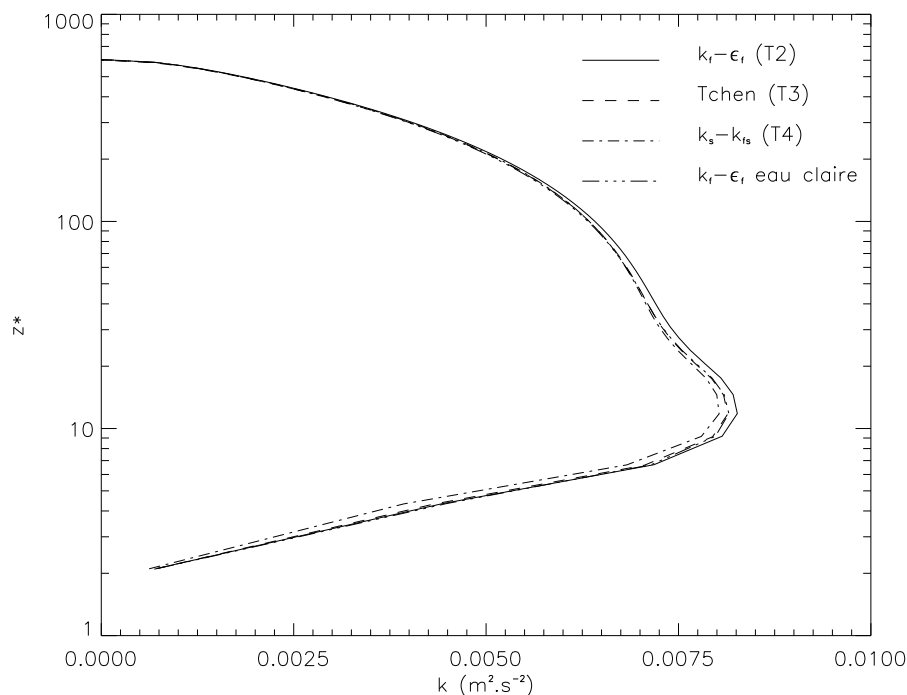


FIG. III.26 – Comparaison des profils d'énergie cinétique du fluide simulés par le modèle diphasique avec 4 modélisations de la turbulence (T1, T2, T3 et T4) pour le cas NS1.

Chapitre II figure II.5) et dans les conditions d'écoulement présentes, l'énergie cinétique turbulente doit être atténuée par la présence des particules. En effet, le nombre de Stokes, rapport du temps de relaxation des particules sur le temps caractéristique du mouvement turbulent du fluide vu par les particules, reste inférieur à 1 (Fig. III.28). Nous sommes dans un régime d'écoulement où le couplage turbulent se fait dans les deux sens ce qui signifie que la turbulence du fluide affecte la trajectoire des particules en suspension d'une part et que la présence des particules modifie la turbulence au sein de la phase fluide d'autre part. Le rapport des différents temps caractéristiques présentés sur la figure (Fig. III.28) illustre l'importance des différents processus. Il apparaît clairement que les effets d'entraînement des particules par l'écoulement moyen du fluide sont prépondérants dans la suspension d'un facteur 10 environ par rapport aux interactions turbulentes fluide-particule et d'un facteur supérieur à 10 000 par rapport aux collisions. Près du fond, les interactions turbulentes fluide-particule deviennent du même ordre que l'entraînement des particules par l'écoulement moyen du fluide.

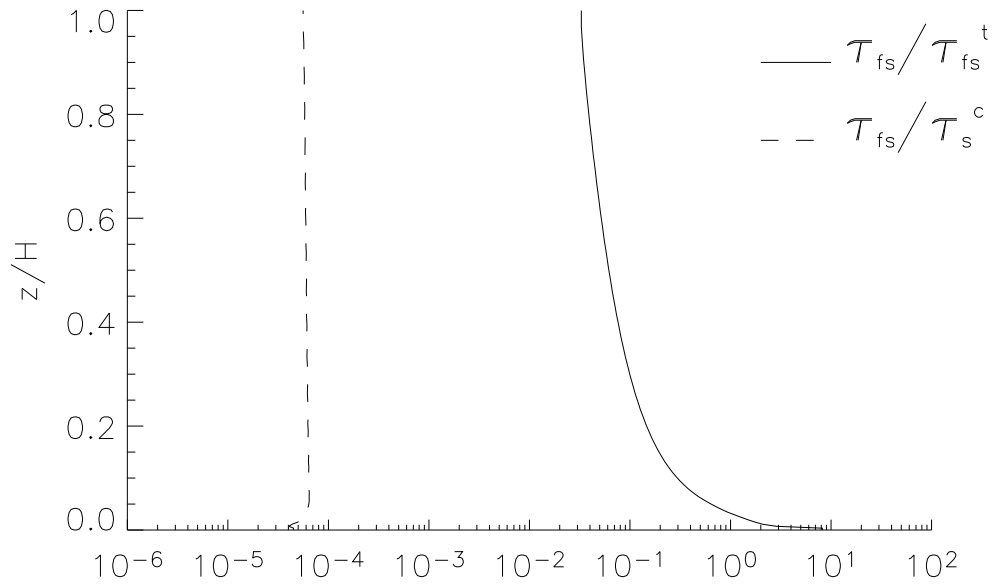


FIG. III.27 – Rapport de différents temps caractéristiques pour le cas NBS1 (— τ_{fs}/τ_{fs}^t et - - - τ_{fs}/τ_s^c). Simulation avec le modèle $k_s - k_{fs}$ (T4).

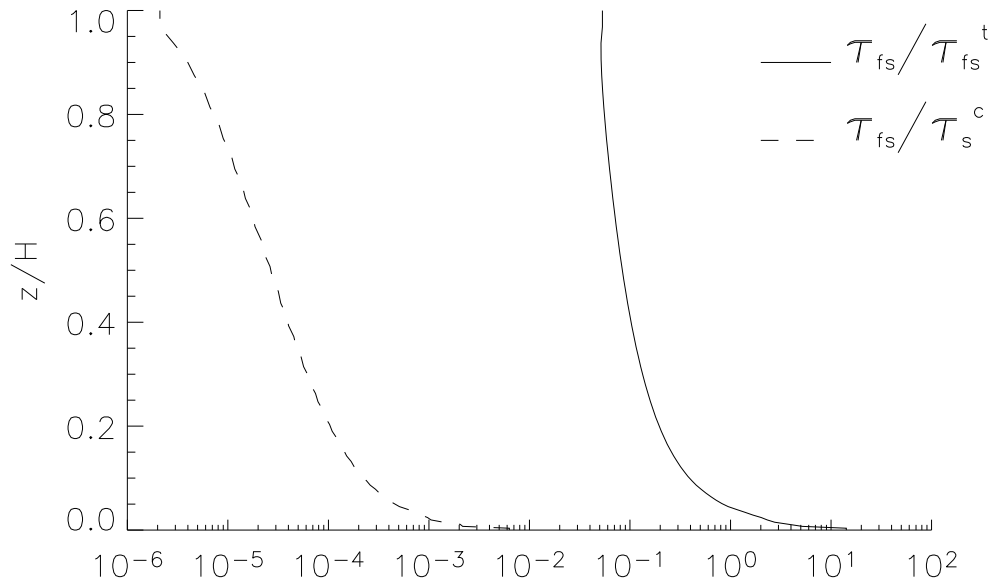


FIG. III.28 – Rapport de différents temps caractéristiques pour le cas NS1 (— τ_{fs}/τ_{fs}^t et - - - τ_{fs}/τ_s^c). Simulation avec le modèle $k_s - k_{fs}$ (T4).

III.3.3 Conclusion

Ces résultats permettent de valider les développements sur la modélisation de la turbulence présentés au chapitre II. Nous avons réalisé des simulations en faisant varier l'inertie des particules. Pour des particules de faible inertie (NBS1), les résultats obtenus par le modèle diphasique sont en accord avec les mesures expérimentales et les résultats théoriques. Dans ce cas les processus physiques sont correctement représentés par les profils théoriques et le modèle diphasique. Par contre lorsque les particules ont une inertie importante (NS1), les profils théoriques sont mis en défaut dans leurs hypothèses. L'approche diphasique permet alors de représenter l'ensemble des processus physiques :

- existence d'une différence de vitesse horizontale entre les particules et l'eau ;
- dispersion des particules par le mouvement turbulent du fluide ;
- atténuation de l'énergie cinétique turbulente du fluide due à la présence des particules.

Nous insistons sur le fait qu'aucun coefficient n'a été ajusté dans ces simulations, ce qui constitue une amélioration majeure par rapport à l'approche classique pour la modélisation du transport sédimentaire.

Concernant la modélisation de la turbulence pour la phase solide, l'approche basée sur la résolution d'équations de transport pour k_s et k_{fs} ne semble pas apporter une amélioration majeure, au vu de l'augmentation de complexité que celle-ci implique, par rapport au modèle algébrique basé sur la théorie de [Tchen \(1947\)](#). En effet, dans le cas où les particules ont une faible inertie (NBS) les résultats obtenus avec ces deux modèles de turbulence (T3 et T4) sont tout à fait corrects. Lorsque les particules ont une inertie plus grande (NS), la différence se situe essentiellement sur le profil d'énergie cinétique turbulente fluide pour lequel le modèle à équation de transport (T4) semble plus adapté. Par contre, l'absence de modélisation des grandeurs turbulentes pour la phase solide (*i.e.* : k_s et k_{fs}), hypothèse (T2) ne semble pas adaptée au problème. Notamment l'atténuation de l'énergie cinétique turbulente pour la phase fluide n'est pas simulée et des oscillations ont été observées sur les profils de fraction volumique dans le cas des particules possédant une faible inertie (NBS).

Notons également que ces résultats sont obtenus dans un cadre de modélisation bi-dimensionnel et instationnaire, contrairement aux résultats présentés dans la littérature. Cette spécificité nous permet d'envisager des simulations dans des conditions d'écoulement instationnaire et non uniforme comme l'action des vagues sur un fond sédimentaire et les effets combinés vagues et courants.

III.4 Application au transport en suspension d'un matériel cohésif : cas-test du canal hippodrome

III.4.1 Configuration expérimentale

Les travaux sont basés sur les résultats expérimentaux ([Rouas, 1996](#)) obtenus dans le canal hippodrome de la société SOGREAH. Le canal utilisé a la forme d'un hippodrome d'une largeur de 0,5 m et d'une profondeur de 0,5 m (Figure III.29). Il est constitué par deux tronçons rectilignes de 16 m de longueur chacun et de deux courbes de 180° de 3 m de longueur, sa longueur développée est de 38 m. Le canal tourne en circuit fermé. Les appareils de mesure sont placés sur une partie rectiligne du canal dont les parois sont en verre. Le reste du canal est en plexiglas translucide.

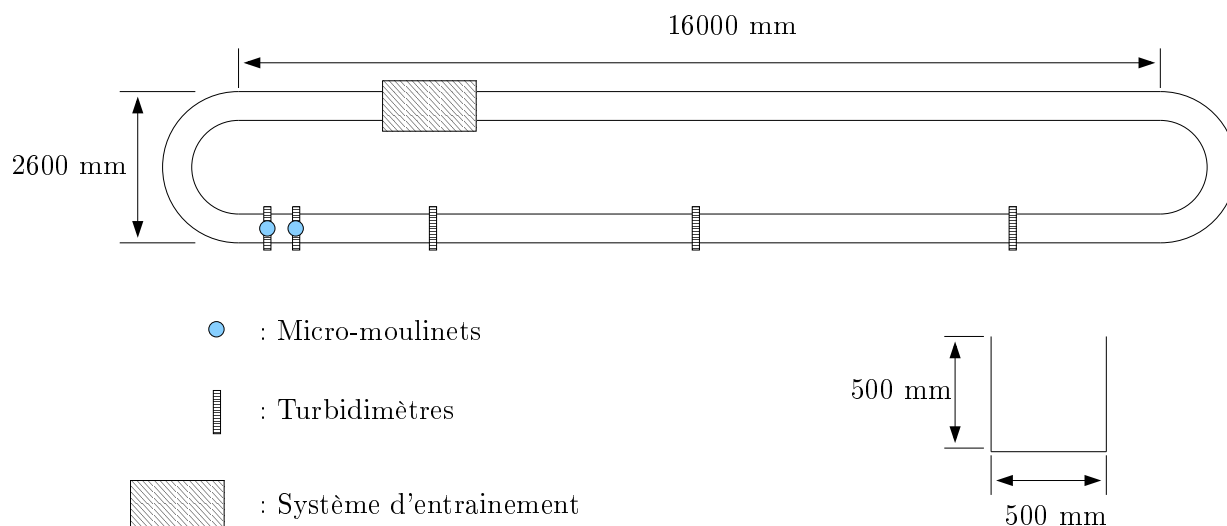


FIG. III.29 – Configuration expérimentale.

Les courants sont générés par des disques verticaux de 1,1 m de diamètre partiellement immergés, disposés dans la partie rectiligne opposée à celle où sont effectuées les mesures. La vitesse maximale générée est de 0,6 m/s en eau claire. Lorsque les eaux sont chargées en sédiments, cette vitesse maximale diminue, en fonction de la concentration des sédiments en suspension.

Les vitesses sont mesurées au moyen d'un micro-moulinet lorsque la concentration en suspension n'est pas trop élevée. Sinon la mesure de vitesse est réalisée par chronométrage du temps de parcours d'un flotteur lesté, dans la partie droite du canal.

Deux dispositifs sont utilisés, l'un pour la mesure des concentrations de sédiments en suspension, l'autre pour la mesure des concentrations dans le lit de vase.

La concentration des sédiments en suspension est mesurée en continu au moyen de cinq turbidimètres. Pour chacun, un prélèvement est effectué par pompage dans une tranche

verticale située dans l'axe du canal, à des niveaux fixes. Chaque prélèvement est analysé en continu. Deux types de turbidimètre sont utilisés avec des gammes de mesures comprises entre 0 - 12 kg/m^3 et 0 - 30 kg/m^3 respectivement.

Le gradient de concentration dans le lit de vase est mesuré à l'aide d'une sonde à ultrasons (sonde ECOVUS). La mesure fournie par l'appareil concerne une valeur moyenne de concentration sur une épaisseur de sédiments de 7 mm. Les mesures sont effectuées sur une verticale dans le dépôt avec un pas de 2,5 mm. La gamme de concentration mesurée est comprise entre 50 et 700 kg/m^3 . En plus des mesures décrites ci-dessus, des prélèvements sont effectués périodiquement à différents niveaux puis analysés afin d'obtenir la composition granulométrique et la concentration massique.

Les essais ont été réalisés par Boutin (1993) et reproduits partiellement dans la thèse de Rouas (1996). Ils ont servi à la validation du modèle hydrosédimentaire développé au cours de cette thèse. Les conditions expérimentales sont les suivantes : vitesse moyenne de 7 $cm.s^{-1}$, concentration initiale homogène ($C_0 = 30g.l^{-1}$) et une durée de 126 h. Notons que le mélange des sédiments est assuré par un brassage mécanique et une mise en vitesse maximum de la lame d'eau.

Pour les essais réalisés le protocole suivant a été appliqué :

- Réalisation du mélange eau et sédiment dans le canal par brassage mécanique et mise en vitesse maximum de la lame d'eau, afin d'obtenir une concentration initiale uniforme C_0 .
- La vitesse des disques est ensuite rapidement réduite jusqu'à obtention du palier de vitesse désiré.
- La durée des essais est variable de quelques heures à plusieurs jours.

Nous disposons du profil de vitesse à deux instants ($t = 35$ min et $t = 48$ h 25) ainsi que des profils de concentration en suspension (13 profils - $t \in [0 ; 1390]$ min) et de profils de concentration dans le lit à différents instants (9 profils - $t \in [160 ; 2845]$ min).

Avant cela, nous allons décrire l'adaptation numérique du modèle au cas de l'écoulement dans un canal cyclique. Les modifications du modèle concernent l'introduction de conditions de périodicité et la prise en compte d'un dispositif d'entraînement de la lame d'eau (Chauchat et al., 2006c, 2007a).

III.4.2 Adaptation au cas du canal hippodrome

Conditions périodiques

La première étape du développement du modèle a consisté à introduire les conditions de périodicité. Une particularité de ce modèle est qu'il calcule la pression totale (hydrostatique et dynamique), par conséquent une équation de Laplace est résolue sur la pression totale. Cette équation doit être résolue par une méthode itérative (GMRES, Gauss Seidel, ...). Nous avons utilisé une technique de bandes de recouvrement pour traiter la périodicité : $\phi_{1,j} = \phi_{nx-1,j}$ et $\phi_{2,j} = \phi_{nx,j} \forall j \in [1, NZ]$ où ϕ désigne soit une composante de la vitesse, soit une grandeur scalaire.

Entraînement de la lame d'eau par introduction d'un forçage interne

Afin de reproduire au mieux la structure de l'écoulement expérimental notre choix s'est porté sur l'introduction d'un forçage volumique sur une portion du canal pour représenter l'effet du système d'entraînement. Ce forçage apparaît dans l'équation de conservation de la composante horizontale de la quantité de mouvement (Eq. III.4).

$$\frac{\partial u_i^f}{\partial t} + u_j^f \frac{\partial u_i^f}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p_f}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu_t \frac{\partial u_i^f}{\partial x_j} \right) + \frac{F}{\rho_f} \delta_{i1} H(x_1) G(x_3) \quad (\text{III.4})$$

$$H(x_1) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 \in [x_F^1; x_F^2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{III.5})$$

$$G(x_3) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_3 \in [z_F^{\min}; \eta] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{III.6})$$

x_i, u_i désignent respectivement la coordonnée cartésienne et la composante de la vitesse du fluide sur i et p, ρ et ν_t représentent respectivement la pression, la masse volumique et la viscosité du fluide. F désigne le forçage volumique, celui-ci est imposé sur une partie du domaine comprise entre x_F^1 et x_F^2 sur l'horizontale et z_F^{\min} et η sur la verticale. Les calculs sont réalisés à débit fixé, aussi nous nous inspirons de la procédure utilisée dans les simulations d'écoulement turbulent entre deux plaques à débit fixé (*Guillou, 2005; Guillou and Makhloufi, 2002; Deschamps, 1988; Lenormand et al., 2000*). Pour estimer le forçage, l'équation de conservation de la quantité de mouvement est intégrée sur la direction x pour obtenir une équation pour le débit.

$$\int_x \int_z \frac{\partial u_i^f}{\partial t} dx dz = -\frac{1}{\rho_f} \int_x \int_z \frac{\partial p_f}{\partial x_i} dx dz + \int_x \int_z \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu_t \frac{\partial u_i^f}{\partial x_j} \right) dx dz + \int_x \int_z \frac{F}{\rho_f} \delta_{i1} H(x_1) G(x_3) dx dz \quad (\text{III.7})$$

$$\int_x \frac{\partial Q_f}{\partial t} dx = -\frac{1}{\rho_f} \int_x \int_z \frac{\partial p'_f}{\partial x_i} dx dz - g \int_x \int_z \frac{\partial \eta}{\partial x} + \int_x (\tau_s - \tau_b) dx + F_x \frac{dLdR}{\rho_f} \quad (\text{III.8})$$

Où $dL = x_F^2 - x_F^1$ et $dR = \eta - z_F^{\min}$, τ_s, τ_b désignent respectivement la contrainte de cisaillement à la surface et au fond. Introduisons la longueur du canal L et notons les valeurs moyennes sur l'horizontale $\overline{\phi}^x$:

$$L \frac{\partial \overline{Q_f}^x}{\partial t} = \frac{L}{\rho_f} (\overline{\tau_s}^x - \overline{\tau_b}^x) + F_x \frac{dLdR}{\rho_f} \quad (\text{III.9})$$

$$\frac{\partial \overline{Q_f}^x}{\partial t} = \frac{1}{\rho_f} (\overline{\tau_s}^x - \overline{\tau_b}^x) + F_x \frac{dLdR}{\rho_f L} \quad (\text{III.10})$$

En faisant l'hypothèse d'une contrainte nulle à la surface : $\overline{\tau_s}^x = 0$ l'équation (Eq.

III.10) sous forme discrète s'écrit :

$$\frac{Q_f^{n+1} - Q_f^n}{\Delta t} = \frac{1}{\rho_f} \left[-\bar{\tau}_b^x + F_x \frac{dLdR}{L} \right] \quad (\text{III.11})$$

Une équation pour F est écrite pour obtenir de manière itérative Q et F par une méthode du point fixe (Eq. III.12).

$$F_x^{n+1} \frac{dLdR}{L} - \bar{\tau}_b^{n+1} = F_x^n \frac{dLdR}{L} - \bar{\tau}_b^n + \rho_f \Delta t^* [a (Q_f^{n+1} - Q_0) + b (Q_f^n - Q_0)] \quad (\text{III.12})$$

Où F_x^n et F_x^{n+1} sont les termes de forçage aux instants n et n+1, Q_0 est le débit cible, a et b, sont deux paramètres. Dans le cas de l'écoulement entre deux plaques [Deschamps \(1988\)](#) a montré que les valeurs optimales de ces coefficients étaient $a = 2/\Delta t$ et $b = -0,2/\Delta t$.

Le problème consiste donc à résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} Q_f^{n+1} = Q_f^n + \frac{\Delta t}{\rho_f} \left[-\bar{\tau}_b^x + F_x \frac{dLdR}{L} \right] \\ F_x^{n+1} = F_x^n + \frac{L}{dLdR} \{ \bar{\tau}_b^{n+1} - \bar{\tau}_b^n + \rho_f \Delta t^* (a (Q_f^{n+1} - Q_0) + b (Q_f^n - Q_0)) \} \end{cases} \quad (\text{III.13})$$

Propagation d'un soliton dans un canal périodique

Pour valider la condition périodique nous avons étudié le cas-test d'un soliton se propageant dans un canal cyclique. Ainsi, nous avons pu nous assurer de la robustesse du code pour un cas typiquement non-hydrostatique. La figure (Fig. III.31) montre, à différents instants, le profil de la surface libre et le champ des vitesses. Le soliton se propage dans le canal et passe la condition périodique.

La déformation de l'onde après plusieurs tours est présentée sur la figure (Fig. III.30). On observe une diminution d'amplitude et un léger déphasage de l'onde. La modification de l'onde est faible et imputable à l'introduction d'une diffusion numérique due à l'utilisation du schéma UPWIND du premier ordre. Ainsi la condition de périodicité est vérifiée.

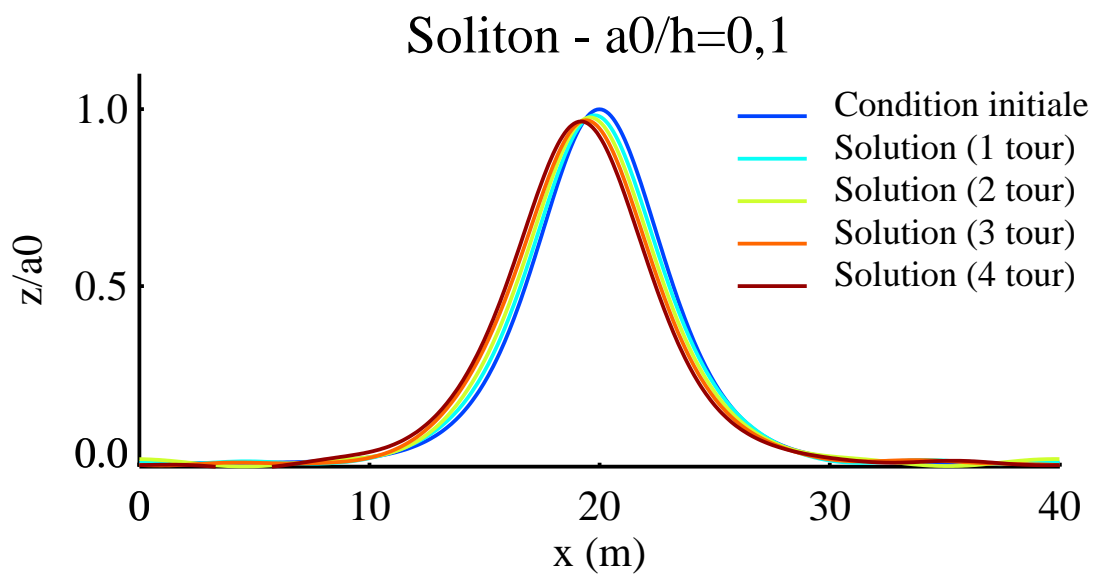


FIG. III.30 – Profils du soliton après plusieurs tours dans le canal périodique.

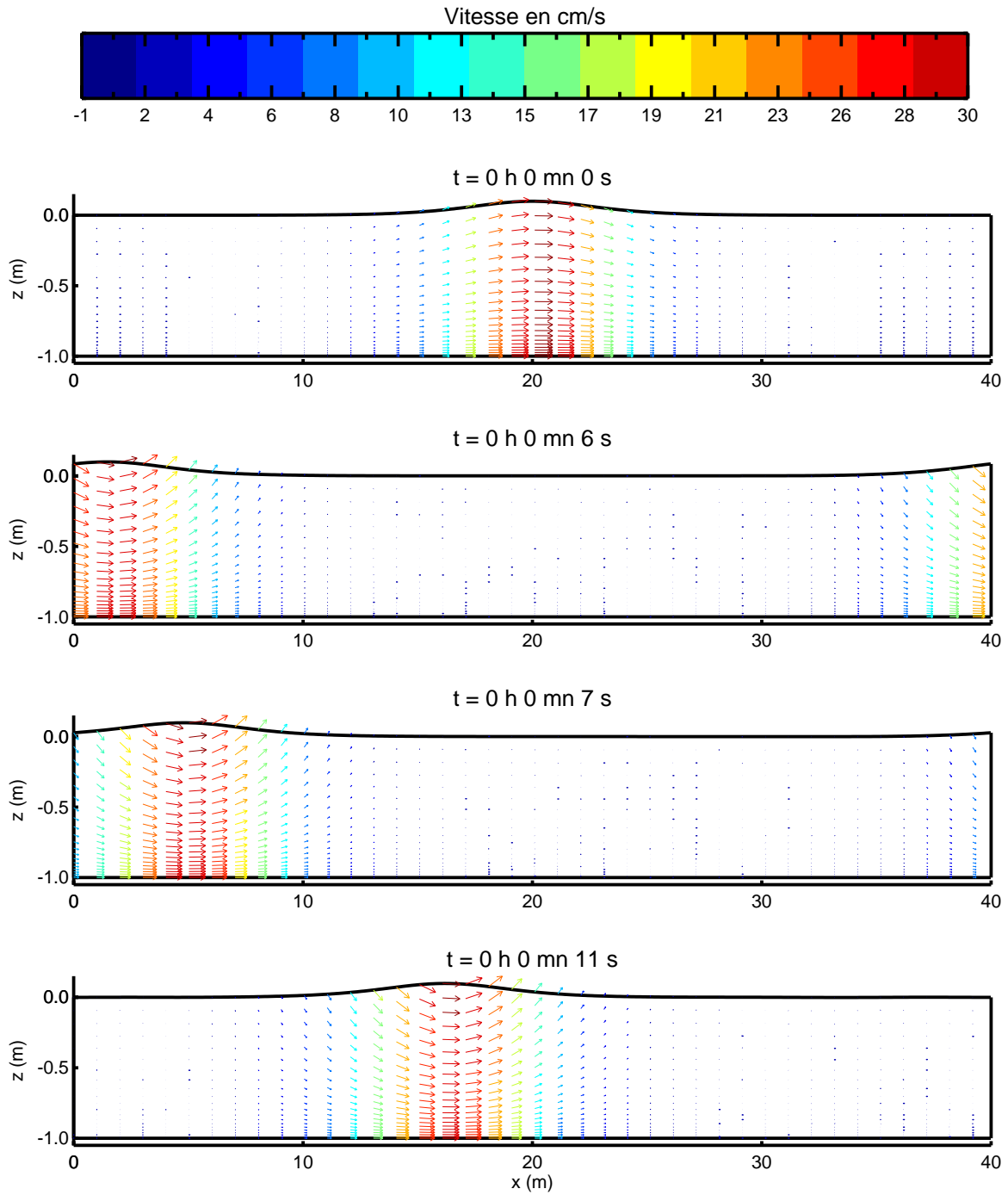


FIG. III.31 – Profils de surface libre et champ des vitesses à différents instants pour le cas d'un soliton se propageant dans le canal périodique.

Entraînement de la lame d'eau par introduction d'un forçage interne

L'écoulement est au repos à l'instant initial, le forçage volumique est imposé en suivant une rampe jusqu'à l'instant $t = 500s$, puis il est constant. Celui-ci est imposé entre $x = 5m$ et $x = 10m$.

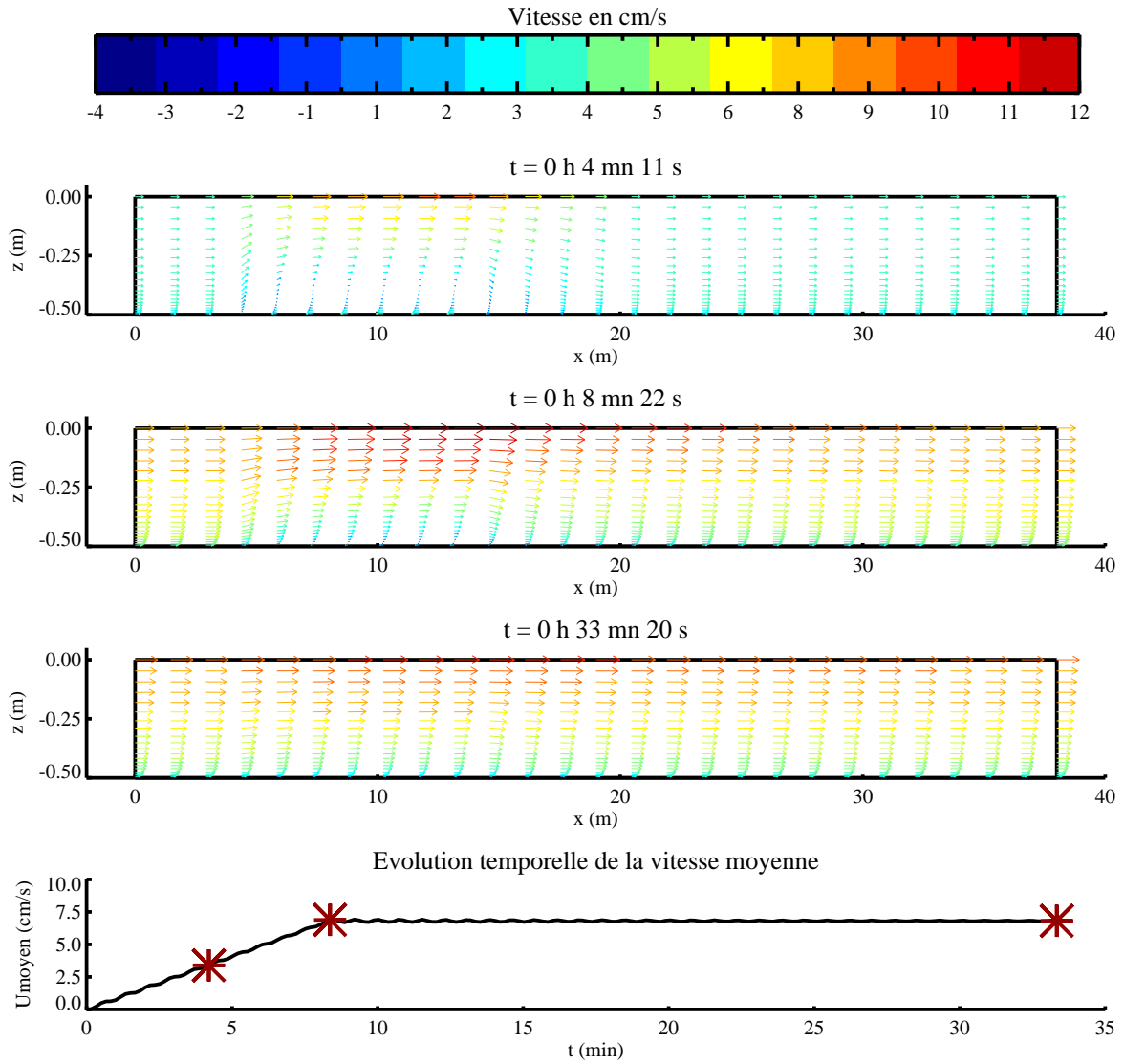


FIG. III.32 – Champ de vitesse à différents instants et évolution temporelle de la vitesse moyenne dans le canal.

La figure (Fig. III.32) montre le champ de vitesse à différents instants ainsi que l'évolution temporelle de la vitesse moyenne dans le canal. Sur cette figure, on observe la mise en écoulement du canal périodique soumis au forçage volumique. La vitesse moyenne se stabilise autour de la vitesse-cible imposée. La procédure permettant d'imposer le forçage

est donc validée pour un écoulement de fluide seul.

Finalement, nous avons adapté le code de calcul diphasique pour traiter un écoulement dans un canal périodique où l'écoulement est introduit par un forçage volumique extérieur représentant la présence d'un ensemble de disques partiellement immergés dans la lame d'eau. Ceci correspond au canal hippodrome de la société SOGREAH. Nous allons maintenant introduire des sédiments dans le canal.

III.4.3 Simulation hydro-sédimentaire

En se basant sur le cas réalisé par [Rouas \(1996\)](#), nous avons introduit des sédiments dans le canal périodique. Nous allons comparer les résultats du modèle diphasique avec les mesures de concentration des sédiments en suspension. La concentration initiale en sédiments est homogène ($C_0 = 30g/l$) et la vitesse d'écoulement moyen est de $U_0 = 7cm/s$. Une simulation réalisée sans sédiment permet d'initialiser les champs de vitesse et les grandeurs turbulentes pour la phase fluide.

Au fond une condition d'adhérence est imposée sur la vitesse de la phase fluide. Pour la vitesse horizontale de la phase solide, une condition de glissement est imposée. Le tableau (Tab. III.5) récapitule les conditions aux limites pour ces simulations. Pour les modèles de turbulence, les conditions aux limites au fond et à la surface libre sont imposées comme présentées dans l'équation (Eq. III.14). Etant donné le niveau élevée de concentration en particules, le modèle k_ε à deux couches n'est pas utilisé dans ces simulations. La dissipation de l'énergie cinétique turbulente de la phase fluide est imposée égale à la production d'énergie cinétique turbulente de la phase fluide sur la première maille au-dessus du fond, cette condition revient à supposer qu'il y a équilibre local de la turbulence en ce point ([Leuppi, 2005](#)). Pour les simulations présentées dans cette section le pas de temps est de 10^{-2} s.

$$\begin{aligned} \text{A la surface libre : } \quad & \frac{\partial k_f}{\partial z} = \frac{\partial \varepsilon_f}{\partial z} = \frac{\partial k_s}{\partial z} = \frac{\partial k_{fs}}{\partial z} = 0 \\ \text{Au fond : } \quad & \frac{\partial k_f}{\partial z} = \frac{\partial \varepsilon_f}{\partial z} = \frac{\partial k_s}{\partial z} = \frac{\partial k_{fs}}{\partial z} = 0 \end{aligned} \tag{III.14}$$

Au cours de cette thèse nous avons identifié une lacune concernant la modélisation des processus turbulents, notamment les effets de dispersion des particules ([Chauchat et al., 2006a](#)). La première approche utilisée était très simplifiée. Celle-ci est basée sur l'approche proposée par [Greimann et al. \(1999\)](#) (Cf. chapitre I.3.2 qui consiste à faire l'hypothèse que les corrélations des fluctuations de vitesses croisées fluide-solide sont égales aux corrélations des fluctuations de vitesse fluide : $\langle \vec{u}'_f \otimes \vec{u}'_s \rangle_s = \langle \vec{u}'_f \otimes \vec{u}'_f \rangle_f$). La fermeture du coefficient de dispersion turbulente pour les particules est alors obtenue à partir du profil empirique proposé par [Nezu and Nakagawa \(1993\)](#) (Eq. III.15)

	Ouest	Est	Fond
η	périodique	périodique	
u_f	périodique	périodique	$u_f = 0$
u_s	périodique	périodique	$\frac{\partial u_s}{\partial n} = 0$
w_k	périodique	périodique	$w_k = 0$
α_s	périodique	périodique	$\frac{\partial \alpha_s}{\partial n} = 0$
ϕ	périodique	périodique	

TAB. III.5 – Conditions aux limites.

$$\langle w_f'^2 \rangle_f = u_*^2 C_\nu e^{-1.34\sigma} \quad (\text{III.15})$$

Avec u_* la vitesse de frottement au fond, $C_\nu = 1.51$ une constante et σ la hauteur adimensionnelle au-dessus du fond.

Sous ces hypothèses nous obtenons une fermeture pour le coefficient de dispersion sur la verticale de la forme :

$$D_{fs,zz}^t = \tau_{fs}^t u_*^2 C_\nu e^{-1.34\sigma},$$

et la vitesse de dérive sur la verticale s'écrit :

$$w_d = \tau_{fs}^t u_*^2 C_\nu e^{-1.34\sigma} \frac{1}{\alpha_s \alpha_f} \frac{\partial \alpha_s}{\partial z} \quad (\text{III.16})$$

La turbulence pour la phase fluide est modélisée par le modèle de type $k_f - \varepsilon_f$.

Les résultats obtenus en terme de profils de concentration sont présentés sur la figure (Fig. III.33) (*Chauchat et al., 2006c,a*). Le profil de concentration à 15 minutes est très proche des observations. Par contre à 30 minutes, les résultats numériques sont plus éloignés des mesures et le gradient de concentration au fond n'augmente pas comme il devrait le faire pour former un fond concentré. Ceci s'explique certainement du fait que la modélisation adoptée est basée sur une hypothèse d'écoulement dilué, ce qui n'est plus le cas ici. Il apparaît donc nécessaire de modéliser la turbulence de la phase solide et des interactions turbulentes fluide-particule de manière plus précise. Nous proposons dans la suite de cette section de reprendre ces simulations avec les développements présentés dans le chapitre II.

Résultats et discussion

Nous montrons sur la figure (Fig. III.34) les profils d'énergie cinétique turbulente pour la phase fluide obtenus avec le modèle de turbulence complet $k_s - k_{fs}$. Celle-ci est totalement dissipée après seulement 30 secondes de simulation. Ceci met en évidence un problème avec l'application de ce modèle de turbulence dans le cas présent. Le problème est très vraisemblablement d'ordre théorique. En effet, nous avons adopté l'hypothèse des milieux dilués pour obtenir les équations du modèle de turbulence. En se reportant à la classification de *Elgobashi (1991)* (Fig. II.5) nous ne pouvons plus nous placer dans le cadre de cette hypothèse. Les collisions entre particules deviennent importante. Aussi, les modélisations adoptées pour décrire les termes de transfert d'énergie cinétique turbulente et de dissipation ne sont probablement pas adaptées ici. Ce problème reste entier car nous n'avons relevé aucune étude dans la littérature concernant la modélisation de la turbulence dans les écoulements diphasiques liquide-particule avec des concentrations volumiques de cette ordre.

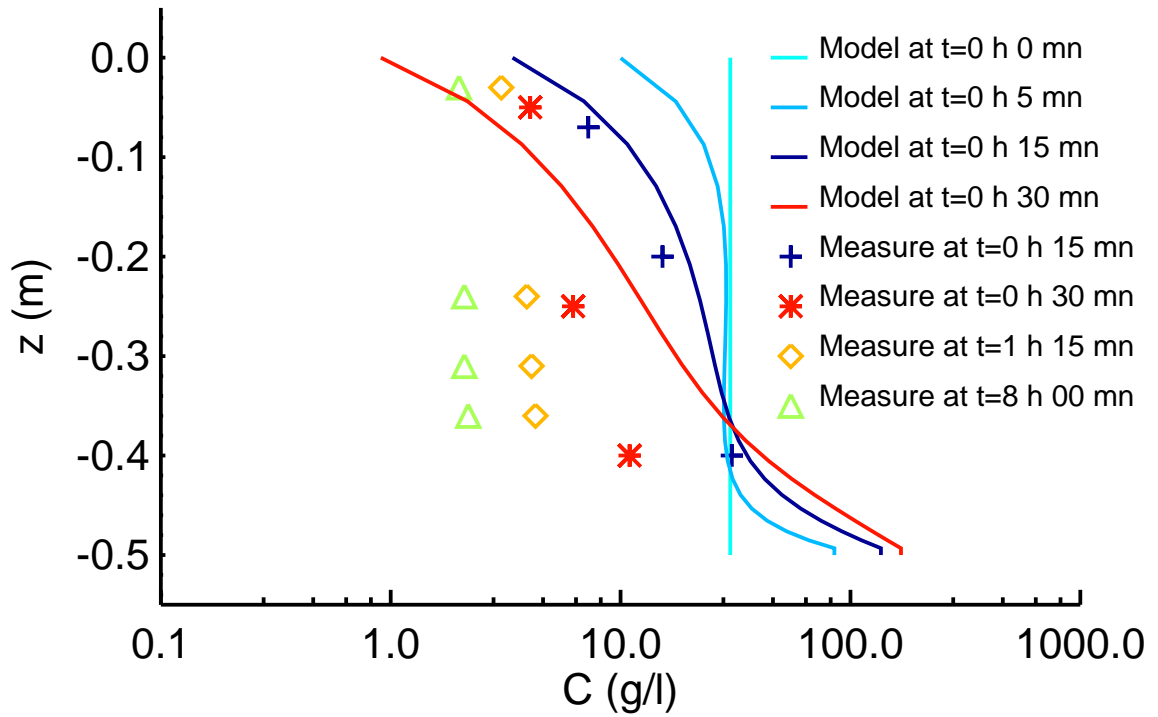


FIG. III.33 – Comparaison des profils de concentration numériques et expérimentaux à différents instants dans le canal hippodrome. La vitesse de dérive est modélisée par l'équation (Eq. III.16).

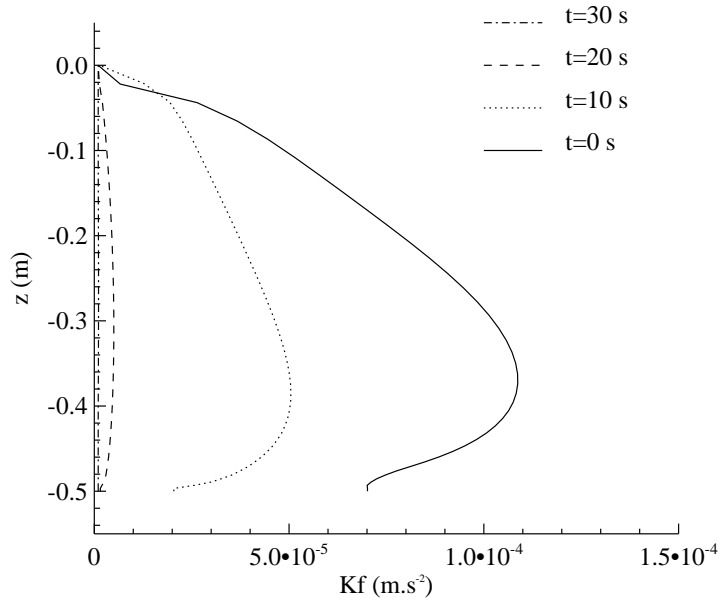


FIG. III.34 – Profils d'énergie cinétique turbulente fluide à différents instants. Simulation réalisée avec le modèle $k_s - k_{fs}$ (T4).

Dans une première approche nous avons négligé les transferts d'énergie cinétique turbulente entre les phases pour illustrer l'effet de la dispersion turbulente sur le maintien en suspension des particules. Pour ce faire nous avons réalisé deux séries de simulations en introduisant des sédiments. La première sans vitesse de dérive : hypothèse T_1 ; et la seconde avec une modélisation de la vitesse de dérive. Le coefficient de dispersion est considéré égal à la viscosité turbulente du fluide : hypothèse T_2 (Cf. i)). Nous avons choisi 3 tailles de particules représentatives de la granulométrie de l'échantillon : $d = 5 \mu m$, $d = 10 \mu m$ et $d = 20 \mu m$ avec une masse volumique $\rho_s = 2650 kg.m^{-3}$. Le choix d'un coefficient de dispersion isotrope (*i.e.* : $\overline{D_{fs}^t} = \nu_f^t$) se justifie ici du fait des très faibles valeurs de la vitesse de chute des particules ($\approx 10^{-4} m.s^{-1}$). Les résultats sont présentés sur la figure (Fig. III.35).

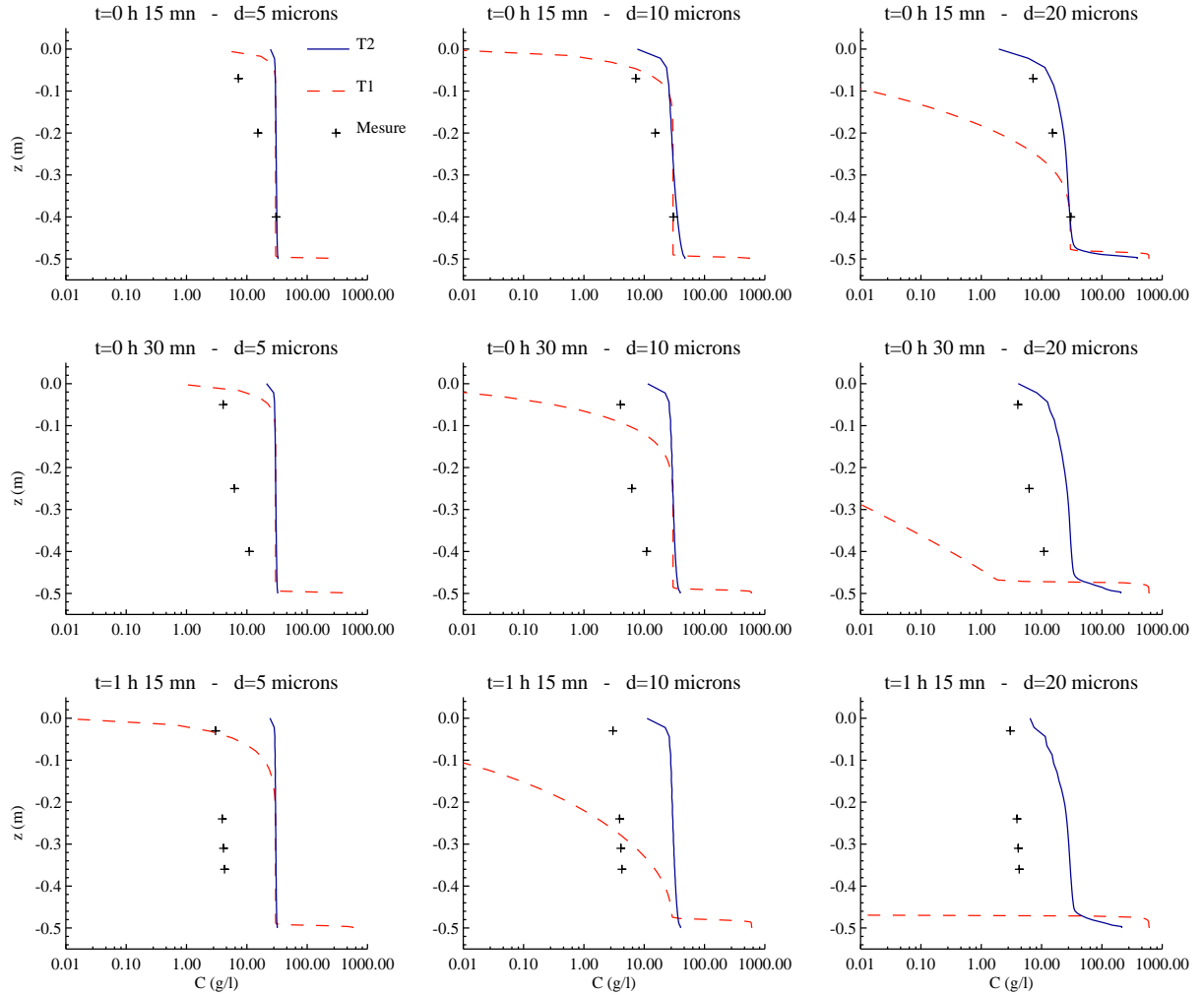


FIG. III.35 – Comparaison des résultats du modèle diphasique avec les mesures expérimentales (*Boutin, 1993*) sur les profils de concentration à différents instants. Simulations réalisées avec 3 diamètres de particule ($d = 5, 10$ et $20 \mu m$) et les modèles de turbulence T_1 (modèle $k_f - \varepsilon_f$ sans modèle de dispersion) et T_2 (modèle $k_f - \varepsilon_f$ avec modèle de dispersion).

La colonne de gauche montre les profils de concentration obtenus avec des particules d'un diamètre $d = 5\mu m$. Lorsque la dispersion n'est pas introduite, deux interfaces sont observées l'une entre la suspension et le fond, l'autre entre la suspension et l'eau claire sous la surface libre. Cependant le maintien en suspension est important et la concentration en suspension est encore de 30 g.l^{-1} après 1H15 de simulation. Sur le profil de concentration obtenu avec un modèle de dispersion, aucune interface n'apparaît et le profil de concentration est sensiblement constant sur toute la profondeur.

Au centre sont représentés les profils de concentration obtenus avec les particules de diamètre $d = 10\mu m$. Sans modèle de dispersion, le dépôt augmente avec le temps et, après 1H15 de simulation, une grande partie des sédiments se sont déposés. La concentration en suspension dans la moitié supérieure de l'écoulement est très faible, nettement inférieur aux mesures qui sont de l'ordre de 4 g.l^{-1} . Lorsque la dispersion est introduite, un profil d'équilibre est rapidement atteint mais l'ordre de grandeur des concentrations en suspension est cette fois-ci nettement supérieur aux mesures.

Les profils de concentration présentés dans la colonne de droite correspondent au cas des particules de diamètre $d = 20\mu m$. Les commentaires faits dans le cas des particules de diamètre $d = 10\mu m$ sans dispersion turbulente restent valables. Après 1H15 de simulation tous les sédiments ont chutés. Lorsque la dispersion est introduite, la concentration au fond augmente ($\approx 300\text{ g.l}^{-1}$) contrairement au cas des particules de $10\mu m$. Le profil d'équilibre est atteint après 30 minutes environ et la quantité de matière en suspension calculée par le modèle est nettement supérieure aux mesures.

La figure (Fig. III.36) montre les rapports de différents temps caractéristiques dans le canal hippodrome obtenus par la simulation pour les 3 diamètres de particule et à $t = 1\text{ h }15\text{ min}$ et avec l'hypothèse T2 sur la dispersion des particules. Sur cette figure il apparaît clairement que l'entraînement des particules par le mouvement moyen est le processus prépondérant pour les trois tailles de particules. En effet, le rapport du temps de relaxation des particules sur le temps caractéristique de la turbulence vue par les particules, d'une part, et le rapport du temps de relaxation des particules sur le temps caractéristiques des collisions binaires, d'autre part, sont nettement inférieurs à un. Ceci signifie que le temps de relaxation des particules est inférieur aux deux autres et que la force de traînée est prépondérante sur les interactions turbulentes, de six ordres de grandeur, et les collisions, de trois ordres de grandeur. Cette figure montre également que le rapport du temps de relaxation des particules sur le temps caractéristique de la turbulence vue par les particules augmente avec la taille des particules et illustre ainsi l'influence de l'inertie des particules sur le phénomène de dispersion des particules par la turbulence du fluide.

Cependant nous avons pu constater sur les résultats précédents (Cf. Fig. III.35) que la dispersion turbulente avait un rôle important dans le maintien en suspension des sédiments

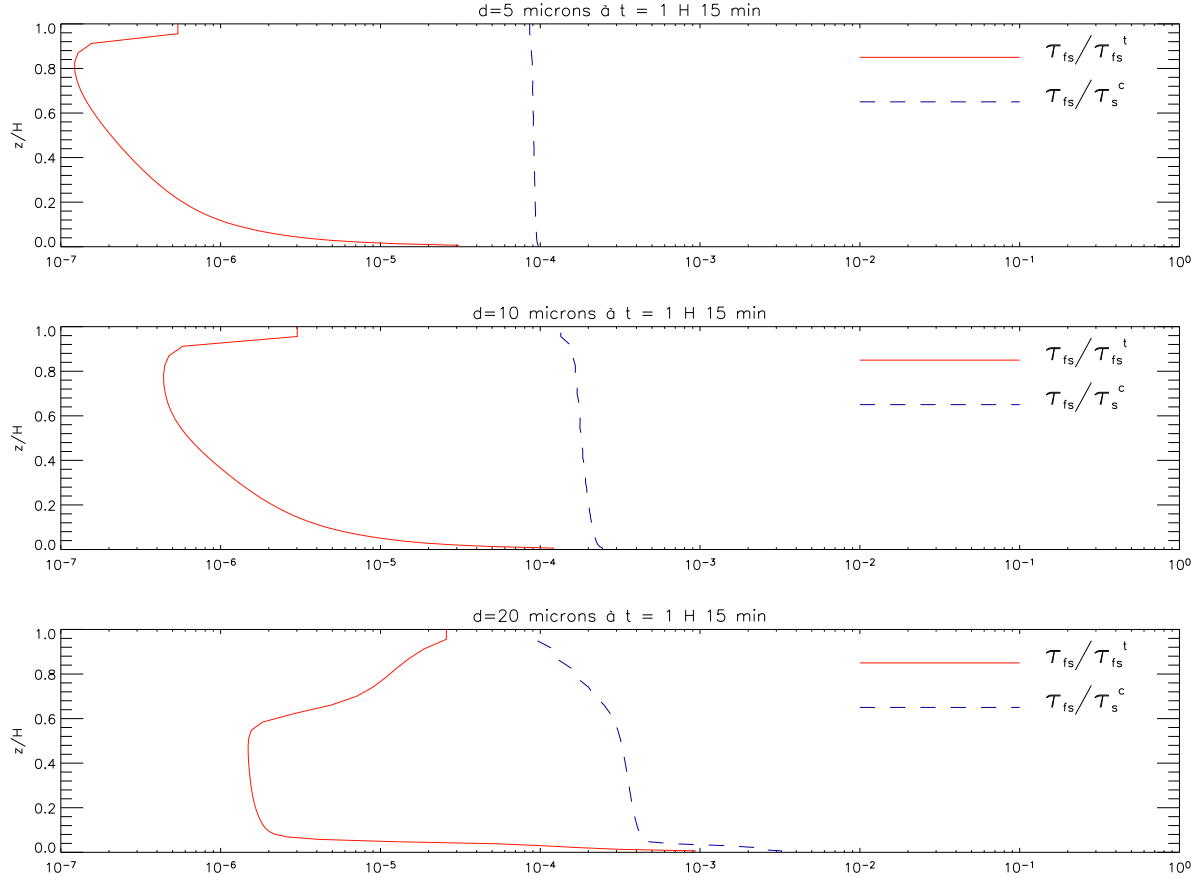


FIG. III.36 – Rapport de différents temps caractéristiques dans le canal hippodrome obtenus par la simulation pour les 3 diamètres de particule et à $t = 1 \text{ h } 15 \text{ min}$ (— τ_{fs}/τ_{fs}^t et - - - τ_{fs}/τ_s^c). Simulation réalisée avec le modèle de turbulence T2.

mais celle-ci est surestimée dans le cas du canal hippodrome. Le fait de négliger les terme des transferts d'énergie cinétique turbulente entre les phases explique certainement cette surévaluation de la dispersion. L'énergie cinétique turbulente de la phase fluide devrait être atténuée lorsque la concentration de sédiments en suspension augmente et par conséquent la dispersion des particules par l'écoulement turbulent du fluide. Notons toutefois qu'étant donné la très petite valeur du temps de relaxation des particules (τ_{fs}) comparé au temps caractéristique de la turbulence vue par les particules (τ_{fs}^t), l'intérêt de l'approche diphasique sur ce cas est moins flagrante que pour celui des sables précédemment étudié (Cf. III.3).

Conclusion

Sur ces simulations nous avons en partie répondu au problème identifié au cours de ce travail de recherche (*Chauchat et al., 2006c,a*) concernant la modélisation de la turbulence. Et en particulier les effets de dispersion des particules par le mouvement turbulent du fluide. Les écarts obtenus entre les simulations avec et sans modélisation de la dispersion

des particules illustrent clairement ce propos. Ces résultats mettent en évidence d'autres problèmes, liés certainement au niveau élevé de concentration en sédiments. Nous pensons que l'origine de ces problèmes vient de la modélisation des termes de transfert d'énergie cinétique turbulente entre les phases dans les équations pour k_f et ε_f .

III.5 Synthèse des résultats

Les phénomènes principaux qui apparaissent dans la colonne de mélange eau-sédiment sont :

- le transport en suspension pour lequel la dispersion turbulente agit pour le maintien en suspension des particules ou la remise en suspension ;
- la floculation pour les particules cohésives ;
- la sédimentation libre puis entravée du fait de l'augmentation de la concentration en particules (les collisions interparticulaires se font plus nombreuses) et le courant de retour ("backflow") correspondant au déplacement du fluide en réponse à la chute des particules ;
- le blocage dû à un réseau de contacts pour les sédiments non-cohésifs (lit sableux) ou la consolidation pour les sédiments cohésifs (fond vaseux).

Le schéma (Fig. III.37) résume la prépondérance de l'un ou de l'autre des différents processus le long de la colonne de mélange eau-particule, du fond non érodable jusqu'à la surface libre.

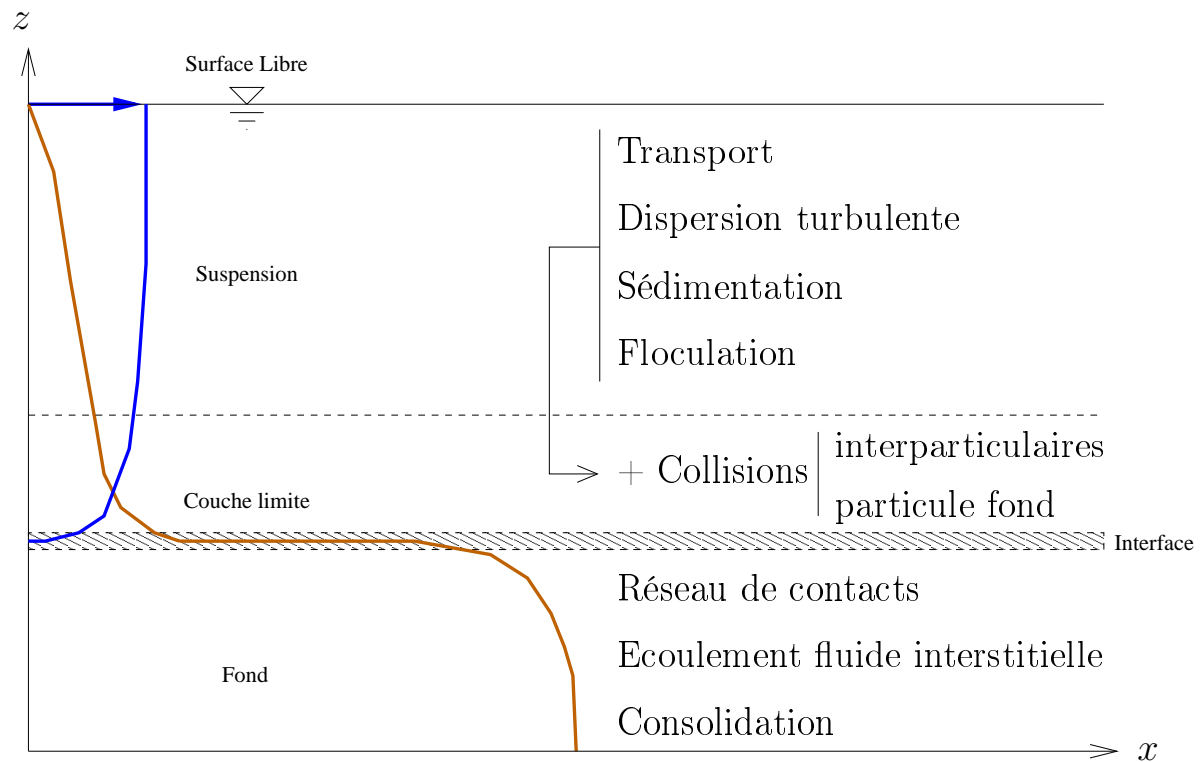


FIG. III.37 – Schéma de synthèse.

Dans le cas de particules non-cohésives, aux travers des simulations de ce chapitre, nous avons pu montrer le bien-fondé de l'approche proposée. La sédimentation puis le blocage des particules sont bien simulés (III.2) aboutissant à la formation d'un fond concentré.

Le courant de retour (" backflow ") a été observé sur le test du courant engendré par la chute de particules (Cf. 1.3.3) (*Barbry et al.*, 2000). Les caractéristiques du transport de sédiments en suspension en régime turbulent, observé par *Muste et al.* (2005), sont reproduites par l'utilisation de modèles de turbulence complexes (développés au cours de cette thèse II), à savoir :

- existence d'une différence de vitesse horizontale entre les particules et l'eau ;
- dispersion des particules par le mouvement turbulent du fluide ;
- atténuation de l'énergie cinétique turbulente du fluide due à la présence des particules.

Du travail reste encore à effectuer car les résultats des simulations, en terme de défaut de vitesse horizontale entre les phases, demeurent assez éloignés des mesures.

Dans le cas de particules cohésives, les simulations mettent en évidence les limites du modèle et le travail qu'il reste à accomplir. La comparaison des simulations de sédimentation en eau calme avec une expérience réalisée avec une vase réelle montre la grande influence de la taille des particules. Ceci peut être imputable à la polydispersion du diamètre des particules due à la granulométrie et à l'influence du processus de floculation. L'application au cas du transport en suspension de sédiments cohésifs met en évidence la nécessité d'approfondir la modélisation de la turbulence lorsque l'hypothèse de milieu dilué n'est plus valable.

Chapitre IV

Application à l'estuaire de la Seine : une tentative de modélisation

Ce dernier chapitre présente une première approche de la simulation hydrosédimentaire de l'estuaire de la Seine avec le modèle diphase. On y aborde des compléments sur la dynamique estuarienne, l'estuaire de la Seine et ses caractéristiques et l'adaptation du modèle à l'estuaire (intégration des équations sur la largeur et conditions de simulation). Enfin, les résultats de calibration et de simulation hydrosédimentaires sont présentés.

IV.1 Rappels et compléments sur les processus hydro-sédimentaires en estuaire

Le schéma suivant (Fig. IV.1) représente l'ensemble des processus influant sur la dynamique estuarienne. Nous allons tout d'abord préciser quelques processus importants pour le transport sédimentaire et l'hydrodynamique dans l'estuaire de la Seine.

La marée

Dans les zones côtières et estuariennes la propagation de l'onde de marée est fortement influencée par la remontée des fonds et le découpage des côtes. Le frottement sur le fond tend à atténuer l'amplitude et à ralentir la propagation de l'onde. Un rétrécissement de la section de l'estuaire crée un phénomène de convergence des berges qui a pour effet d'amplifier l'onde de marée au cours de sa propagation vers l'amont.

La différence de hauteur d'eau entre la Pleine Mer (PM) et la Basse Mer (BM) induit une asymétrie de l'onde de marée : la marée se propage plus rapidement à marée haute qu'à marée basse. Le flot, plus rapide, dure moins longtemps que le jusant. Cette asymétrie de l'onde de marée peut jouer un rôle déterminant dans le transport des sédiments fins :

- hyposynchrone : l'amplitude de la marée diminue au cours de sa propagation vers l'amont.
- synchrone : l'amplitude de la marée est constante dans l'estuaire.

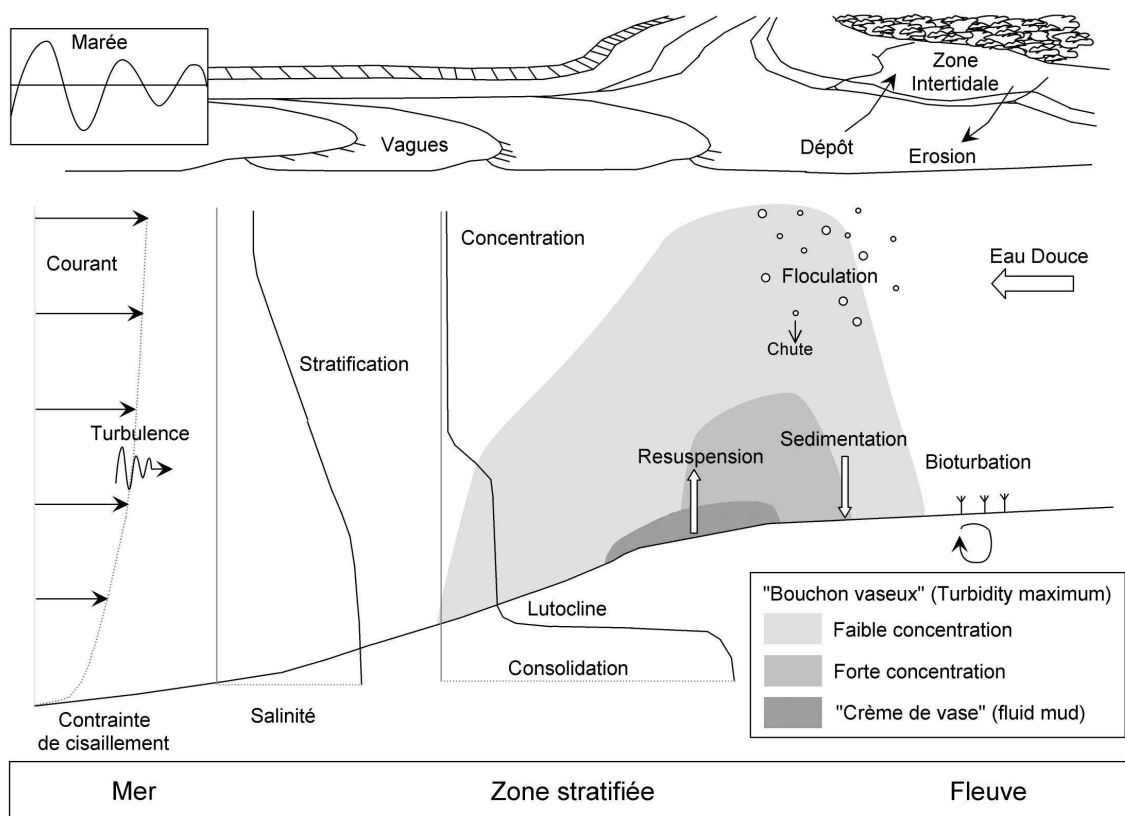


FIG. IV.1 – Schéma de fonctionnement d'un estuaire

- hypersynchrone : l'amplitude de la marée augmente au cours de sa propagation dans l'estuaire.

Le débit fluvial

Les fleuves et plus précisément les estuaires constituent les exutoires des eaux douces des bassins versants qui leur sont rattachés. Le débit fluvial varie au cours des saisons suivant l'hydrologie du fleuve, on distingue en général une saison humide, période de crue et une saison sèche, période d'étiage. La rencontre des masses d'eaux douce et salée se fait dans l'estuaire ou la zone côtière à proximité. La densité de l'eau de mer varie principalement en fonction de la quantité de sel qu'elle contient ([Hamilton, 1975](#)), la différence de densité entre les deux masses d'eaux ($\rho_{\text{eau mer}} = 1020 - 1030 \text{ kg/m}^3$; $\rho_{\text{eau douce}} \approx 1000 \text{ kg/m}^3$) peut engendrer des processus complexes comme les courants de densité.

Le vent et les vagues

Le vent à l'échelle des océans est responsable de la génération des houles. A l'approche des côtes les vagues sont modifiées, leurs hauteurs diminuent sous l'effet du frottement sur le fond, leur direction de propagation est influencée par la topographie : phénomènes de

réfraction et de diffraction. Dans les zones intertidales, l'effet du déferlement des vagues participe fortement à l'érosion et au remaniement des sédiments. Lors des épisodes de tempête le vent génère une agitation locale de la surface libre et constitue une source d'énergie turbulente importante, surtout à l'embouchure. C'est un facteur important dans la réorganisation des fonds sédimentaires.

Le phénomène de "bouchon vaseux"

Du point de vue de la dynamique sédimentaire les mécanismes liés à l'existence du "bouchon vaseux" sont la circulation de densité et l'asymétrie de l'onde de marée. D'après [Allen \(1972\)](#), la formation du "bouchon vaseux" en Gironde est due à la circulation résiduelle engendrée par l'écoulement entre eau douce et eau salée. Le "bouchon vaseux" se forme près du point nodal où la vitesse résiduelle est faible, ce qui peut favoriser l'accumulation des particules en suspension. Dans les estuaires stratifiés, la circulation résiduelle est orientée vers l'amont au fond et vers l'aval en surface. Les suspensions provenant du fleuve peuvent atteindre l'embouchure ou être ramenées vers l'amont si elles chutent dans la partie inférieure de l'écoulement. Elles sont alors piégées au point nodal de densité, en amont duquel l'écoulement sur toute la colonne d'eau est dirigé vers l'aval. Les particules peuvent amorcer un nouveau cycle. Le "bouchon vaseux" formé est dit "bouchon vaseux de densité".

La déformation de l'onde de marée peut être à l'origine de la formation du "bouchon vaseux" appelé "bouchon vaseux dynamique" (particulièrement dans les estuaires macrotidaux). L'asymétrie de la marée engendre une inégalité des vitesses de flot et de jusant. Les vitesses de flot sont plus fortes et donc l'érosion est plus importante que pendant le jusant. Les sédiments sont donc préférentiellement transportés vers l'amont jusqu'au point où le débit du fleuve devient prépondérant sur la marée. De plus, l'étale de PM étant plus long que celui de BM, du fait de l'asymétrie de l'onde de marée, le dépôt est plus important pendant l'étale de PM. Ces deux mécanismes induisent un transport des sédiments vers l'amont, appelé "pompage tidal", et un piégeage des sédiments en aval du point où l'écoulement fluvial devient prépondérant.

La "crème de vase"

La "crème de vase" (ou "fluid mud" en anglais) désigne une couche de vase fluide concentrée, de l'ordre de quelques dizaines à quelques centaines de grammes par litre. La "crème de vase" existe si le dépôt est plus rapide que la consolidation, [Li et al. \(1994\)](#) a montré que la crème de vase subit un cycle d'érosion / accumulation au cours d'un cycle Morte-Eau (ME) / Vive-Eau (VE). Au cours d'un cycle de marée de VE les étales sont courtes et le flux de sédimentation est trop faible pour permettre la formation de crème de vase ; les sédiments déposés n'ont pas le temps de consolider et sont remis en suspension dès que les vitesses de courant deviennent importantes. Par contre, lors d'un cycle de ME, les courants sont suffisamment faibles sur une grande partie du cycle de marée et

permettent ainsi la sédimentation d'une grande quantité de sédiments, les conditions de formation de la crème de vase sont ainsi réunies.

IV.2 L'estuaire de la Seine

IV.2.1 Situation

L'estuaire de la Seine est le point d'arrivée en mer des eaux d'un bassin versant, où demeure 30 % de la population française (dont l'agglomération parisienne) et 40 % de l'activité économique nationale. Il se trouve confronté à de sérieux problèmes de pollution. Par ailleurs, l'importance de son rôle de voie de communication a été la cause d'innombrables aménagements qui l'ont transformé en un estuaire complètement endigué. Il a radicalement perdu sa forme "évasée". L'estuaire, partie du fleuve soumise à la marée, s'étend sur 160 kilomètres du Havre au barrage de Poses.

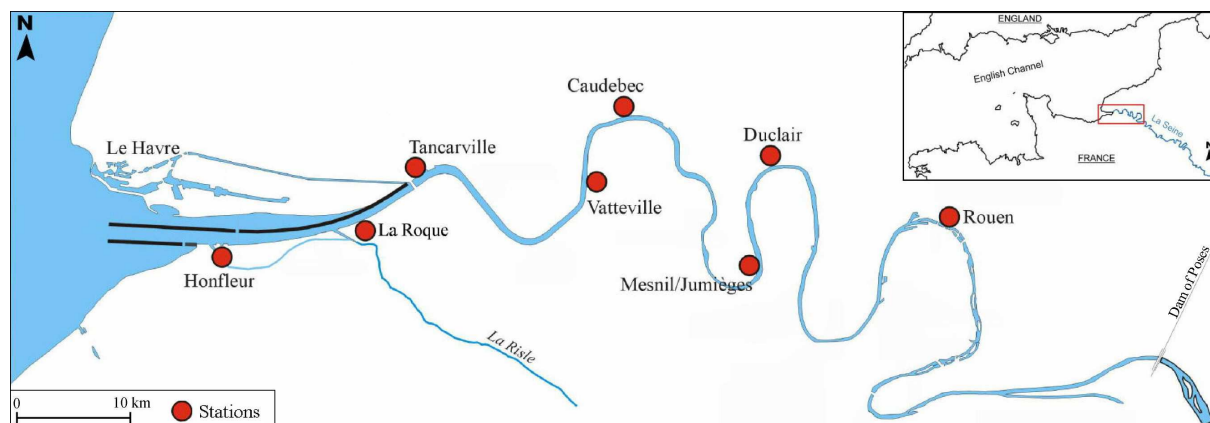


FIG. IV.2 – Carte de l'estuaire de la Seine (*Source : Port Autonome de Rouen, 1999*)

Au début du XIX^{ème} siècle l'estuaire naturel divaguait en méandres à partir de Quilbeuf jusqu'au Havre, le chenal principal avait alors une profondeur maximale de 4,30 m en pleine mer de VE et de 1,80 m en marée de ME. Les aménagements successifs ont abouti aujourd'hui à un chenal navigable d'une profondeur maximale de 10 m en aval de Honfleur.

Ces aménagements ont tendance à renforcer les courants de jusant en fin de marée descendante par effet de canalisation du flux lorsque le niveau d'eau est en-dessous des digues submersibles. Les courants de flot sont forts en début de marée montante et diminuent nettement lorsque le niveau d'eau dépasse les digues submersibles.

IV.2.2 Caractérisation hydrosédimentaire de l'estuaire de la Seine

L'estuaire de la Seine est un estuaire de type macrotidal avec un marnage moyen de 7 mètres à l'embouchure. Le débit fluvial moyen est de $480 \text{ m}^3.\text{s}^{-1}$, celui-ci varie entre $100 \text{ m}^3.\text{s}^{-1}$ en période d'étiage et $2000 \text{ m}^3.\text{s}^{-1}$ en période de crue. En règle général,

l'estuaire de la Seine est hyposynchrone, les effets dus au frottements sur le fond et les berges sont prépondérants sur les effets de convergence des berges, l'onde de marée est amortie au cours de sa propagation dans l'estuaire.

D'après [Brenon and Le Hir \(1999\)](#), dans l'estuaire de la Seine, la formation du bouchon vaseux dépend principalement du pompage tidal dû à l'asymétrie de l'onde de marée et au débit fluvial. Les gradients de salinité ont tendance à déformer le bouchon vaseux mais ils ne constituent pas le processus principal dans la formation de celui-ci dans l'estuaire de la Seine.

Les différentes campagnes de mesures menées dans l'estuaire de la Seine ont montré que le centre du bouchon vaseux est localisé autour de l'extrémité des digues semi-submersibles à basse mer et autour de Tancarville à pleine mer en période de marée de VE et pour un débit moyen du fleuve ([Avoine et al., 1980](#); [Avoine, 1981](#)). Soit une excursion de marée de l'ordre de 20 km. Les concentrations mesurées dans le "bouchon vaseux" sont de l'ordre de 1 g.l^{-1} . Le débit fluvial joue un rôle important sur le comportement du "bouchon vaseux". En marée de VE et en période d'étiage, le centre du "bouchon vaseux" est observé légèrement en aval de Honfleur à basse mer et en amont de Tancarville à pleine mer. A ce débit, l'excursion de marée est donc plus grande qu'à débit moyen. Pour une crue d'environ $1100 \text{ m}^3.\text{s}^{-1}$, le "bouchon vaseux" est moins développé qu'en étiage. Son centre est localisé à l'extrémité des digues semi-submersibles à basse mer. A pleine mer, le "bouchon vaseux" est situé en aval de Tancarville. L'excursion de marée est alors de 13 km environ et elle est plus faible qu'en étiage.

IV.3 Adaptation du modèle à l'estuaire de la Seine

IV.3.1 Intégration sur la largeur des équations

L'estuaire de la Seine étant convergent (Fig. [IV.5](#)) la prise en compte de l'évolution de la largeur est nécessaire. Nous décrivons donc ici l'intégration des équations ([I.16](#)) et ([I.17](#)) dans la direction latérale. Pour ce faire nous utilisons une démarche similaire à celle développée pour l'hydrodynamique par [Charles \(2002\)](#).

Soit un repère orthonormé (O, x_1, x_2, x_3) tel que, x_1 représente la direction horizontale dirigée d'aval en amont, x_2 la direction latérale à la section de l'estuaire et x_3 la verticale ascendante. Nous noterons (u_1^k, u_2^k, u_3^k) les composantes de la vitesse de la phase k, $B=y_2(x_1, x_3) - y_1(x_1, x_3)$ désigne la largeur, y_1 et y_2 sont deux valeurs de l'axe x_2 et $\bar{\phi}$ la moyenne sur la largeur d'une fonction ϕ intégrable et de classe C^2 : $\bar{\phi} = \frac{1}{B} \int_{y_1}^{y_2} \phi dx_2$.

Règle de Leibniz :

<p>Si \mathcal{D} est un opérateur différentiel et ϕ une fonction de classe C^1</p> <p>Alors $\int_{y_1}^{y_2} \mathcal{D}\phi dx_2 = \mathcal{D} \int_{y_1}^{y_2} \phi dx_2 + \phi(y_1)\mathcal{D}y_1 - \phi(y_2)\mathcal{D}y_2$</p>
--

Nous imposons des conditions de non-glissement sur les parois latérales :

$$u_i(y_1) = u_i(y_2) = 0, \forall i \in (1, 2, 3)$$

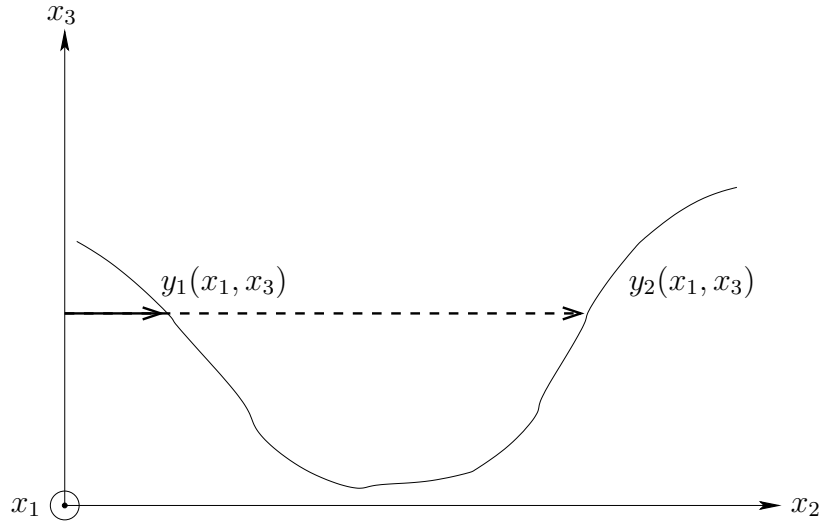


FIG. IV.3 – Section schématique d'un estuaire

Nous rappellerons ici uniquement les résultats principaux. Tous les détails concernant l'intégration des équations de conservation sont présentés en annexe C. Dans cette section, la convention de l'indice répété est utilisée.

a) Equations du modèle intégrées dans le repère cartésien

Les équations obtenues après intégration dans le repère cartésien sont rappelées ici. L'équation de conservation de la masse pour une phase k quelconque s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overline{\alpha_k \rho_k} B) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{\alpha_k \rho_k u_i^k} B) = 0 \quad (\text{IV.1})$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement pour la phase fluide s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u_i^f}}{\partial t} + \frac{\overline{u_i^f}}{u_j^f} \frac{\partial \overline{u_i^f}}{\partial x_j} = & -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial \overline{p_f}}{\partial x_i} + \frac{1}{\alpha_f B} [T_f^s + T_f^f] - \frac{1}{\alpha_f} \frac{1}{4} \frac{1}{|\mathbf{u}^f - \mathbf{u}^s|^2} \frac{\partial \overline{\alpha_f}}{\partial x_i} + \frac{1}{\alpha_f} \beta \left[\overline{A_L} \frac{\partial \overline{u_i^f}}{\partial x_1} \frac{\partial \overline{\alpha_f}}{\partial x_1} + \overline{\nu_t} \frac{\partial \overline{u_i^f}}{\partial x_3} \frac{\partial \overline{\alpha_f}}{\partial x_3} \right] \\ & - \frac{\overline{C_{FD}}}{\alpha_f \rho_f} \left(\overline{u_i^f} - \overline{u_i^s} \right) - g \delta_{i3} + T_{lat}^f + \frac{1}{\alpha_f \rho_f B} \alpha_s \tau_{coll_{i2}} - \frac{1}{B} \frac{g}{Ch^2} u_1^f |u_1^f| \left(\frac{\partial \chi}{\partial x_i} |y_1| + \left| \frac{\partial \chi}{\partial x_i} \right| y_2 \right) \end{aligned} \quad (IV.2)$$

De même, l'équation de conservation de la quantité de mouvement pour la phase solide s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u_i^s}}{\partial t} + \frac{\overline{u_i^s}}{u_j^s} \frac{\partial \overline{u_i^s}}{\partial x_j} = & -\frac{1}{\rho_s} \frac{\partial \overline{p_s}}{\partial x_i} - \frac{G(\alpha_f)}{\alpha_s \rho_s} \frac{\partial \alpha_s}{\partial x_i} + \frac{1}{\alpha_s B} [T_s^s + T_s^f] + \left(\frac{4\sigma_p}{\alpha_s \rho_s d} - \frac{\rho_f}{4\alpha_s \rho_s} |\mathbf{u}^f - \mathbf{u}^s|^2 \right) \frac{\partial \overline{\alpha_s}}{\partial x_i} + \frac{1}{\alpha_s} \beta \left[\overline{A_L} \frac{\partial \overline{u_i^s}}{\partial x_1} \frac{\partial \overline{\alpha_s}}{\partial x_1} + \overline{\nu_t} \frac{\partial \overline{u_i^s}}{\partial x_3} \frac{\partial \overline{\alpha_s}}{\partial x_3} \right] \\ & + \frac{\overline{C_{FD}}}{\alpha_s \rho_s} \left(\overline{u_i^f} - \overline{u_i^s} \right) - g \delta_{i3} + T_{lat}^s + \frac{1}{\alpha_s^{-2} \beta \rho_s B} \alpha_s \tau_{coll_{i2}} - \frac{1}{B} \frac{g}{\alpha_s \beta} \frac{g}{Ch^2} u_1^s |u_1^s| \left(\frac{\partial \chi}{\partial x_i} |y_1| + \left| \frac{\partial \chi}{\partial x_i} \right| y_2 \right) \end{aligned} \quad (IV.3)$$

Avec les notations suivantes :

$$\begin{cases} T_l^k = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\alpha_k A_L^l \frac{\partial B \overline{u_i^k}}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\alpha_k \nu_t^l \frac{\partial B \overline{u_i^k}}{\partial x_3} \right) \\ T_{lat}^k = - \left(\frac{1}{B} A_L^k \frac{\partial \overline{u_i^k}}{\partial x_1} \right) \Big|_m \frac{\partial B}{\partial x_1} - \left(\frac{1}{B} \nu_t^k \frac{\partial \overline{u_i^k}}{\partial x_3} \right) \Big|_m \frac{\partial B}{\partial x_3} \\ A_L^f = A_L ; \nu_t^f = \nu_t ; A_L^s = \alpha_s \beta A_L ; \nu_t^s = \alpha_s \beta \nu_t \end{cases} \quad (IV.4)$$

b) Equations du modèle intégrées en coordonnées σ

L'utilisation d'un maillage eulérien adaptatif ([Phillips, 1957](#); [Barbry, 2000](#)) impose un changement de coordonnées $(x_1, x_3) \rightarrow (x^*, \sigma)$:

$$x^* = x_1 ; \sigma = \frac{x_3 + h}{\eta + h} ; t^* = t$$

La coordonnée verticale σ varie de 0 à 1. Les dérivées d'une variable arbitraire ϕ sont alors transformées de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} = \frac{\partial \phi}{\partial x^*} + \underline{\omega}_1 \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \quad , \text{ avec } \underline{\omega}_1 = \frac{1}{H} \left(\frac{\partial h}{\partial x^*} - \sigma \frac{\partial H}{\partial x^*} \right) \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_3} = \frac{1}{H} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t^*} - \frac{\sigma}{H} \frac{\partial \eta}{\partial t^*} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \end{array} \right. \quad (\text{IV.5})$$

Dans la suite de cette section nous utiliserons les notations : $u_k = u_1^k$ et $w_k = u_3^k$. Pour des raisons de clarté, nous omettrons la barre symbolique de la moyenne sur la largeur.

Ainsi l'équation de conservation de la masse (Eq. [IV.1](#)) s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t^*} (\alpha_k \rho_k B) - \frac{\sigma}{H} \frac{\partial \eta}{\partial t^*} \frac{\partial}{\partial \sigma} (\alpha_k \rho_k B) + \frac{\partial}{\partial x^*} (\alpha_k \rho_k u_k B) + \underline{\omega}_1 \frac{\partial}{\partial \sigma} (\alpha_k \rho_k u_k B) + \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial \sigma} (\alpha_k \rho_k w_k B) = 0 \quad (\text{IV.6})$$

On définit une pseudo-vitesse verticale :

$$\underline{\omega} = w_k + \underline{\omega}_1 u_k - \frac{\sigma}{H} \frac{\partial \eta}{\partial t^*} \quad (\text{IV.7})$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement pour la phase fluide (Eq. IV.2) s'écrit :

\triangleright sur (Ox^*) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_f}{\partial t} + u_f \frac{\partial u_f}{\partial x^*} + \frac{\omega}{\partial \sigma} \frac{\partial u_f}{\partial \sigma} = & -\frac{1}{\rho_f} \frac{1}{H} \frac{\partial p_f}{\partial \sigma} - \frac{1}{4\alpha_f} |\mathbf{u}^f - \mathbf{u}^s|^2 \left(\frac{\partial \alpha_f}{\partial x^*} + \frac{\omega_1}{\partial \sigma} \frac{\partial \alpha_f}{\partial \sigma} \right) + \frac{1}{\alpha_f B} T_{fx^*}^f + \frac{1}{\alpha_s B} T_{fx^*}^s + T_{fx^*}^{lat} - C_{FD} (u_f - u_s) \\ & + \frac{\beta}{\alpha_f} \left[A_L \left(\frac{\partial u_f}{\partial x^*} + \frac{\omega_1}{\partial \sigma} \frac{\partial u_f}{\partial \sigma} \right) \left(\frac{\partial \alpha_f}{\partial x^*} + \frac{\omega_1}{\partial \sigma} \frac{\partial \alpha_f}{\partial \sigma} \right) + \frac{\nu_t}{H^2} \frac{\partial u_f}{\partial \sigma} \frac{\partial \alpha_f}{\partial \sigma} \right] \end{aligned} \quad (IV.8)$$

Avec les notations suivantes :

$$\begin{cases} T_{fx^*}^k = \frac{\partial}{\partial x^*} \left[\alpha_k A_L \left(\frac{\partial B u_k}{\partial x^*} + \frac{\omega_1}{\partial \sigma} \frac{\partial B u_k}{\partial \sigma} \right) \right] + \frac{\omega_1}{\partial \sigma} \left[\alpha_f A_L \left(\frac{\partial B u_k}{\partial x^*} + \frac{\omega_1}{\partial \sigma} \frac{\partial B u_k}{\partial \sigma} \right) \right] + \frac{1}{H^2} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\alpha_k \nu_t \frac{\partial B u_k}{\partial \sigma} \right) \\ \quad - \left(\frac{1}{B} A_L \left(\frac{\partial u^f}{\partial x^*} + \frac{\omega_1}{\partial \sigma} \frac{\partial u^f}{\partial \sigma} \right) \right) \Big|_m \left(\frac{\partial B}{\partial x^*} + \frac{\omega_1}{\partial \sigma} \frac{\partial B}{\partial \sigma} \right) - \left(\frac{1}{B H^2} \nu_t \frac{\partial u^f}{\partial \sigma} \right) \Big|_m \frac{\partial B}{\partial \sigma} \\ T_{fx^*}^{lat} = \frac{\alpha_s}{\alpha_f B} \tau_{coll,x^*2} - \frac{g \rho_f}{\alpha_f B C h^2} u_f |u_f| \left(\left| \frac{\partial \chi}{\partial x^*} + \frac{\omega_1}{\partial \sigma} \frac{\partial \chi}{\partial \sigma} \right|_{Y_1} + \left| \frac{\partial \chi}{\partial x^*} + \frac{\omega_1}{\partial \sigma} \frac{\partial \chi}{\partial \sigma} \right|_{Y_2} \right) \end{cases} \quad (IV.9)$$

Les termes $T_{fx^*}^{lat}$ et $T_{f\sigma}^{lat}$ représentent l'effet du frottement sur les parois latérales. La première contribution τ_{coll} modélise les collisions des particules avec les parois. Le second terme représente la contribution de la contrainte de cisaillement sur les berges, avec ξ la coordonnée curviligne des berges. La contrainte de frottement étant modélisée par une loi de type Chézy.

A_L désigne la viscosité turbulente horizontale qui peut être prescrite par une formule empirique ou simplement prise égale à la viscosité turbulente verticale.

$\triangleright \text{Sur } (O\sigma) :$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_f}{\partial t} + u_f \frac{\partial w_f}{\partial x^*} + \underline{\omega} \frac{\partial w_f}{\partial \sigma} = & -\frac{1}{\rho_f} \frac{1}{H} \frac{\partial p_f}{\partial \sigma} - \frac{1}{4\alpha_f} |\mathbf{u}^f - \mathbf{u}^s|^2 \frac{1}{H} \frac{\partial \alpha_f}{\partial \sigma} + T_{f\sigma}^f + T_{f\sigma}^s + T_{f\sigma}^{lat} - C_{FD} (w_f - w_s) - g \\ & + \frac{\beta}{\alpha_f} \left[A_L \left(\frac{\partial w_f}{\partial x^*} + \frac{\omega_1}{\omega_1} \frac{\partial w_f}{\partial \sigma} \right) \left(\frac{\partial \alpha_f}{\partial x^*} + \frac{\omega_1}{\omega_1} \frac{\partial \alpha_f}{\partial \sigma} \right) + \frac{\nu_t}{H^2} \frac{\partial w_f}{\partial \sigma} \frac{\partial \alpha_f}{\partial \sigma} \right] \end{aligned} \quad (\text{IV.10})$$

Avec les notations suivantes :

$$\begin{aligned} T_{f\sigma}^k = & \frac{1}{\alpha_k B} \left[\frac{\partial}{\partial x^*} \left(\alpha_k A_L \left(\frac{\partial B w_k}{\partial x^*} + \frac{\omega_1}{\omega_1} \frac{\partial B w_k}{\partial \sigma} \right) \right) + \frac{\omega_1}{\omega_1} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\alpha_k A_L \left(\frac{\partial B w_k}{\partial x^*} + \frac{\omega_1}{\omega_1} \frac{\partial B w_k}{\partial \sigma} \right) \right) + \frac{1}{H^2} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\alpha_k \nu_t \frac{\partial B w_k}{\partial \sigma} \right) \right] \\ & - \left(\frac{1}{B} A_L \left(\frac{\partial w^k}{\partial x^*} + \frac{\omega_1}{\omega_1} \frac{\partial w^k}{\partial \sigma} \right) \right) \Big|_m \left(\frac{\partial B}{\partial x^*} + \frac{\omega_1}{\omega_1} \frac{\partial B}{\partial \sigma} \right) - \left(\frac{1}{B H^2} \nu_t \frac{\partial B}{\partial \sigma} \right) \Big|_m \frac{\partial B}{\partial \sigma} \\ T_{f\sigma}^{lat} = & \frac{\alpha_s}{\alpha_f B} \tau_{coll\sigma 2} - \frac{g \rho_f}{\alpha_f B C h^2} u_f |u_f| \left(\left| \frac{1}{H} \frac{\partial \chi}{\partial \sigma} \right|_{y_1} + \left| \frac{1}{H} \frac{\partial \chi}{\partial \sigma} \right|_{y_2} \right) \end{aligned} \quad (\text{IV.11})$$

De manière analogue, l'équation de conservation de la quantité de mouvement pour la phase solide (Eq IV.3) s'écrit :

$\triangleright \text{sur } (\text{O}x^*) :$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_s}{\partial t} + u_s \frac{\partial u_s}{\partial x^*} + \underline{\omega} \frac{\partial u_s}{\partial \sigma} = & -\frac{1}{\rho_s} \frac{1}{H} \frac{\partial p_s}{\partial \sigma} + \frac{1}{\alpha_s \rho_s} \left[\frac{4}{d} \sigma_p - G(\alpha_f) - \frac{\rho_f}{4} |\mathbf{u}^f - \mathbf{u}^s|^2 \right] \left(\frac{\partial \alpha_s}{\partial x^*} + \underline{\omega}_1 \frac{\partial \alpha_s}{\partial \sigma} \right) + T_{sx^*}^s + T_{sx^*}^f + T_{sx^*}^{lat} + C_{FD}(u_f - u_s) \\ & + \frac{\beta}{\alpha_s} \left[A_L \left(\frac{\partial u_s}{\partial x^*} + \underline{\omega}_1 \frac{\partial u_s}{\partial \sigma} \right) \left(\frac{\partial \alpha_s}{\partial x^*} + \underline{\omega}_1 \frac{\partial \alpha_s}{\partial \sigma} \right) + \frac{\nu_t}{H^2} \frac{\partial u_s}{\partial \sigma} \frac{\partial \alpha_s}{\partial \sigma} \right] \end{aligned} \quad (\text{IV.12})$$

Avec les notations suivantes :

$$\begin{cases} T_{sx^*}^k = \frac{1}{\alpha_k B} \left[\frac{\partial}{\partial x^*} \left(\alpha_k \alpha_s \beta A_L \left(\frac{\partial B u_k}{\partial x^*} + \underline{\omega}_1 \frac{\partial B u_k}{\partial \sigma} \right) \right) + \underline{\omega}_1 \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\alpha_k \alpha_s \beta A_L \left(\frac{\partial B u_k}{\partial x^*} + \underline{\omega}_1 \frac{\partial B u_k}{\partial \sigma} \right) \right) + \frac{1}{H^2} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\alpha_k \alpha_s \beta \nu_t \frac{\partial B u_k}{\partial \sigma} \right) \right] \\ \quad - \left(\frac{1}{B} \alpha_s \beta A_L \left(\frac{\partial u^k}{\partial x^*} + \underline{\omega}_1 \frac{\partial u^k}{\partial \sigma} \right) \right) \Big|_m \left(\frac{\partial B}{\partial x^*} + \underline{\omega}_1 \frac{\partial B}{\partial \sigma} \right) - \left(\frac{1}{BH^2} \alpha_s \beta \nu_t \frac{\partial u^k}{\partial \sigma} \right) \Big|_m \frac{\partial B}{\partial \sigma} \\ T_{sx^*}^{lat} = \frac{\alpha_s^2 \beta}{\alpha_f B} \tau_{coll,x^*2} - \frac{g \rho_f \alpha_s \beta}{\alpha_f B C h^2} u_s |u_s| \left(\left| \frac{\partial \chi}{\partial x^*} + \underline{\omega}_1 \frac{\partial \chi}{\partial \sigma} \right|_{Y_1} + \left| \frac{\partial \chi}{\partial x^*} + \underline{\omega}_1 \frac{\partial \chi}{\partial \sigma} \right|_{Y_2} \right) \end{cases} \quad (\text{IV.13})$$

$\triangleright \text{Sur } (O\sigma) :$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_s}{\partial t} + u_s \frac{\partial w_s}{\partial x^*} + \omega_s \frac{\partial w_s}{\partial \sigma} = & -\frac{1}{\rho_s} \left(\frac{1}{H} \frac{\partial p_s}{\partial \sigma} \right) + \frac{1}{\alpha_s \rho_s} \left[\frac{4}{d} \sigma_p - G(\alpha_f) - \frac{\rho_f}{4} |\mathbf{u}^f - \mathbf{u}^s|^2 \right] \frac{1}{H} \frac{\partial \alpha_s}{\partial \sigma} + T_{s\sigma}^f + T_{s\sigma}^s + T_{s\sigma}^{lat} + C_{FD}(w_f - w_s) - g \\ & + \frac{\beta}{\alpha_s} \left[A_L \left(\frac{\partial w_s}{\partial x^*} + \omega_1 \frac{\partial w_s}{\partial \sigma} \right) \left(\frac{\partial \alpha_s}{\partial x^*} + \omega_1 \frac{\partial \alpha_s}{\partial \sigma} \right) + \frac{\nu_t}{H^2} \frac{\partial w_s}{\partial \sigma} \frac{\partial \alpha_s}{\partial \sigma} \right] \end{aligned} \quad (\text{IV.14})$$

Avec les notations suivantes :

$$\left\{ \begin{aligned} T_{s\sigma}^k = & \frac{1}{\alpha_k B} \left[\frac{\partial}{\partial x^*} \left(\alpha_k \alpha_s \beta A_L \left(\frac{\partial B w_k}{\partial x^*} + \omega_1 \frac{\partial B w_k}{\partial \sigma} \right) \right) + \omega_1 \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\alpha_k \alpha_s \beta A_L \left(\frac{\partial B w_k}{\partial x^*} + \omega_1 \frac{\partial B w_k}{\partial \sigma} \right) \right) + \frac{1}{H^2} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\alpha_k \alpha_s \beta \nu_t \frac{\partial B w_k}{\partial \sigma} \right) \right] \\ & - \left(\frac{1}{B} \alpha_s \beta A_L \left(\frac{\partial w^k}{\partial x^*} + \omega_1 \frac{\partial w^k}{\partial \sigma} \right) \right) \Big|_m \left(\frac{\partial B}{\partial x^*} + \omega_1 \frac{\partial B}{\partial \sigma} \right) - \left(\frac{1}{B H^2} \alpha_s \beta \nu_t \frac{\partial w^k}{\partial \sigma} \right) \Big|_m \frac{\partial B}{\partial \sigma} \\ T_{s\sigma}^{lat} = & \frac{\alpha_s^2 \beta}{\alpha_f B} \tau_{coll\sigma 2} - \frac{g \rho_f \alpha_s \beta}{\alpha_f B C h^2} u_s |u_s| \left(\left| \frac{1}{H} \frac{\partial \chi}{\partial \sigma} \right|_{y_1} + \left| \frac{1}{H} \frac{\partial \chi}{\partial \sigma} \right|_{y_2} \right) \end{aligned} \right. \quad (\text{IV.15})$$

IV.3.2 Conditions de simulation

Le domaine modélisé s'étend sur 160 kilomètres, du musoir (extrémités des digues submersibles) au barrage de Poses. La bathymétrie utilisée est fournie par le SHOM¹. Le maillage (figure IV.4) est composé de 320 mailles dans la direction longitudinale, raffiné à l'embouchure et de 31 mailles dans la direction verticale, avec un raffinement au fond. Du fait que le modèle numérique soit bidimensionnel vertical, l'emprise de celui-ci est limitée à l'extrémité des digues semi-submersibles. Au-delà, dans la baie de Seine l'hypothèse de faible variation latérale n'est plus acceptable. La largeur de l'estuaire évoluant nettement de l'embouchure à Tancarville, nous avons introduit la variation de largeur (Cf. section IV.3.1) en considérant la distance digue à digue du chenal de navigation (figure IV.5).

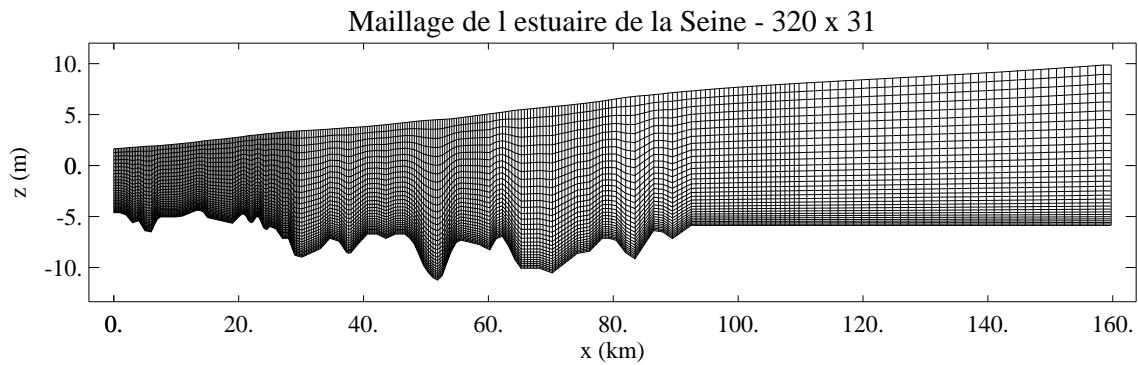


FIG. IV.4 – Maillage de l'estuaire de la Seine

Comme nous l'avons mentionné ci-dessus, le centre du "bouchon vaseux" à basse mer est situé à l'extérieur du domaine modélisé pour des conditions de débit fluvial moyen à fort. Nous avons donc réalisé des simulations avec un débit fluvial d'étiage ($300\text{m}^3.\text{s}^{-1}$) imposé à la frontière Est. Une condition de radiation est imposée sur l'élévation de surface libre à cette frontière. La marée est imposée à la frontière Ouest à partir des données prédites par le SHOM, une condition de radiation avec un terme de rappel est utilisée pour imposer l'élévation de surface libre et la vitesse du courant estimée à partir de l'équation de conservation de la quantité de mouvement.

La quantité de sédiments susceptibles de sortir à marée descendante par la frontière Ouest est calculée par le modèle puis disponible à la marée montante suivante. La concentration en sédiments est estimée en faisant le rapport volume de sédiments sur le volume total sorti lors de la marée descendante précédente. Cette estimation sert pour imposer le flux de sédiments entrant à la marée montante suivante. A la frontière Est on suppose qu'il n'y a pas d'apport de sédiment fluvial, la fraction volumique de sédiment est donc

¹SHOM : Service Hydrographique et Océanographique de la Marine

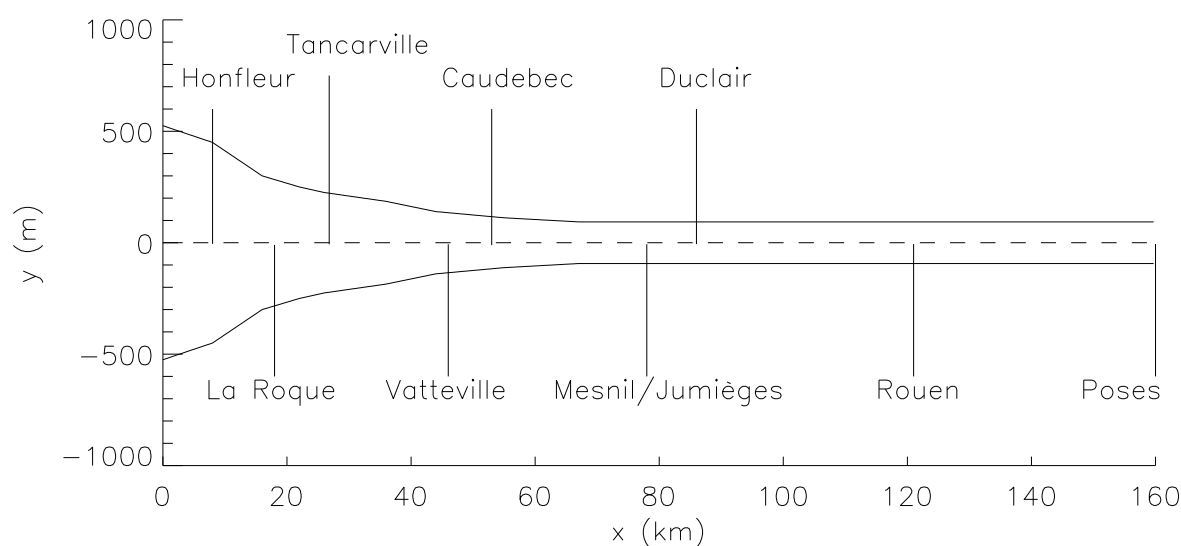


FIG. IV.5 – Largeur de l'estuaire de la Seine

nulle. Cette hypothèse est acceptable à l'échelle de temps à laquelle nous travaillons (14 jours).

Les mesures et observations utilisées pour calibrer et valider le modèle diphasique sont brièvement présentées ci-dessous.

Le Schéma d'Aptitude et d'Utilisation de la Mer (S.A.U.M.) :

Cette étude ([Avoine et al., 1980](#)) a été réalisée entre 1977 et 1979. Suite aux campagnes de mesures, les profils longitudinaux de la turbidité dans le chenal de navigation pendant un cycle de marée ont pu être établis pour différents cas : étiage, crue, morte-eau et vive-eau.

Ces données bien qu'anciennes vont nous permettre de vérifier les ordres de grandeur des concentrations et du déplacement longitudinal du bouchon vaseux pendant un cycle de marée.

Mesure du Port Autonome de Rouen :

Sur la cartes du SHOM sont disponibles les hauteurs d'eaux et les courants de marées fournis par le Port Autonome de Rouen. Ces mesures sont disponibles pour des marées de morte-eau et de vive-eau moyennes, coefficient 45 et 90 respectivement, pour différents points de sondage.

Nous avons réalisé une simulation sur un demi-cycle lunaire (14 jours). Une étape de calibration de l'hydrodynamique a consisté à caler le coefficient de Strickler avec le modèle hydrodynamique. Pour cette calibration une première simulation de 14 jours est réalisée afin de fournir une condition initiale correcte ("spin-up"). Une fois la calibration effectuée, la même simulation est réalisée avec des sédiments d'un diamètre de $16 \mu m$ et une masse volumique de $1700 kg.m^{-3}$. Ceux-ci sont introduits sous la forme d'un stock de sédiments déposés entre 45 et 90 km sur une hauteur de un mètre environ dans l'estuaire² avec une

²distance comptée depuis l'extrémité ouest des digues semi-submersibles

concentration de 25 g.l^{-1} . Ce qui correspond à un stock de sédiments de 650 000 tonnes environ. Les comparaisons avec les mesures sont effectuées sur la deuxième partie du cycle ME / VE.

Etant donné les problèmes évoqués au chapitre précédent sur l'application des modèles de turbulence diphasique complet en présence d'une forte concentration en particules, la turbulence de la phase solide n'est pas modélisée sur ces simulations. La turbulence de la phase fluide est simplement modélisée par un modèle de longueur de mélange. Ce modèle est inspiré de la théorie cinétique des gaz ([Prandtl, 1925](#)), l'idée est de relier le coefficient de viscosité turbulente au gradient de vitesse moyenne par l'intermédiaire de la longueur de mélange l_m .

$$\nu_t = l_m^2 \times \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right| \quad (\text{IV.16})$$

Parmi les nombreuses formulations de longueur de mélange, nous avons utilisé celle de [Escudier \(1966\)](#) :

$$l_m = \min[\kappa\alpha(\eta - z_f), \kappa(z - z_f), \kappa(\eta - z)] \quad (\text{IV.17})$$

où $\alpha = 0.19$ est une constante et z_f désigne le niveau du fond.

La contrainte au fond est calculée par la formule de Chézy :

$$\nu_f^t \frac{\partial u_f}{\partial z} = \frac{g}{Ch^2} \| u_m \| u_m \quad (\text{IV.18})$$

Ch désigne le coefficient de Chézy et u_m la vitesse moyenne sur la colonne d'eau. Pour le calcul du coefficient de Chézy nous avons utilisé la formule de Strickler : $Ch = K_s H^{1/6}$, où H désigne la profondeur d'eau. Cette formulation présente l'avantage d'inclure la dépendance du frottement au rayon hydraulique de l'écoulement.

Etant donné les difficultés que nous avons rencontrées dans le cas du transport en suspension de particules cohésives (Cf. section [III.4](#)) nous avons réalisé ces simulations sans modèle de turbulence pour la phase solide.

IV.4 Résultats et discussion

Les hauteurs d'eau (Fig. [IV.6](#)) et les vitesses de courant moyen (Fig. [IV.7](#)) sont comparées aux mesures du Port Autonome de Rouen pour des marées de morte-eau et vive-eau moyenne en différents points de sondage :

- hauteurs d'eau : Honfleur, Tancarville, Caudebec et Duclair
- courant moyen : La Roque, Vatteville, Le Mesnil-Sous-Jumièges et Rouen

La figure (Fig. [IV.6](#)) montre la transformation de l'onde de marée au cours de sa propagation dans l'estuaire. L'évolution temporelle de l'élévation de surface libre est proche d'une sinusoïde à Honfleur (8 km de l'embouchure) pour devenir asymétrique à Duclair (87 km de l'embouchure) : la durée du flot devient plus courte alors que celle du jusant devient plus longue. A Duclair, le flot dure 4 heures alors que le jusant dure 8 heures.

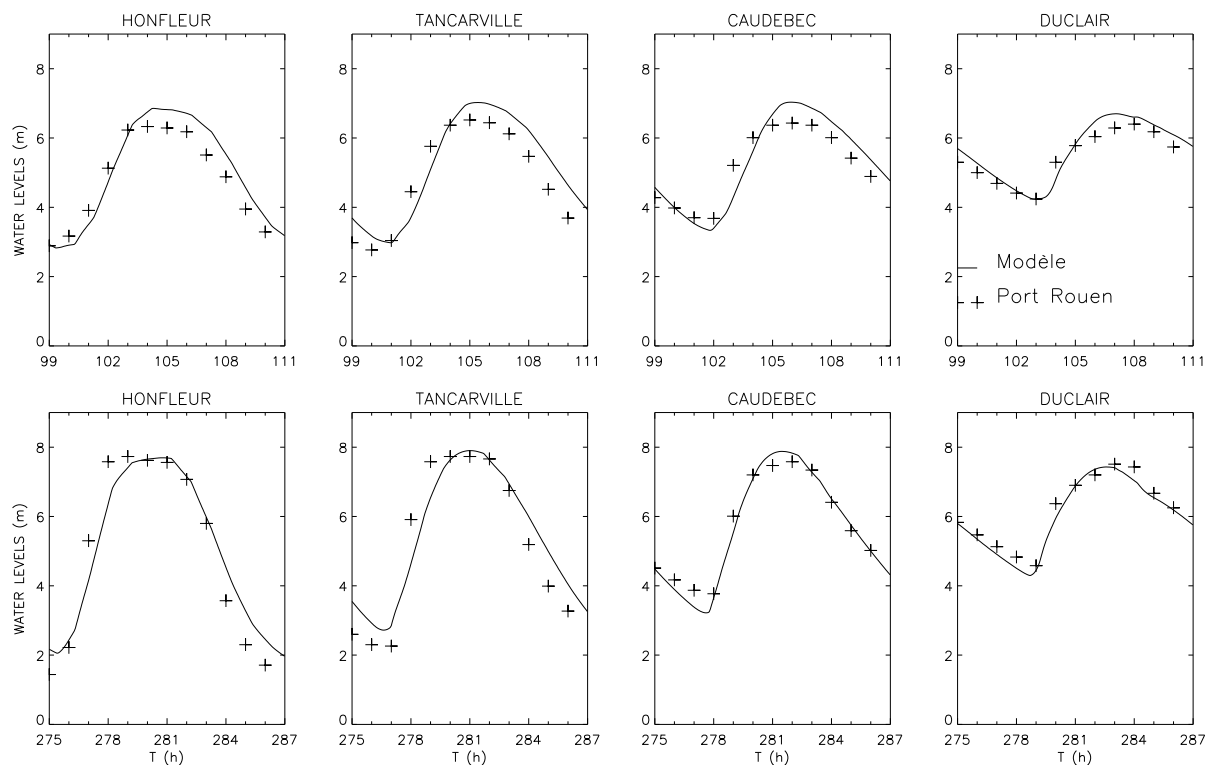


FIG. IV.6 – Elévation de surface libre pour des marées de ME et de VE moyennes en différents points de sondage dans l'estuaire, comparaison avec les données du port Autonome de Rouen

On retrouve cette asymétrie sur la vitesse du courant figure (Fig. IV.7). Les courants de flot sont plus forts que ceux de jusant. Ces forts courants de flot sont responsables de la remise en suspension des sédiments : le pompage tidal. Les résultats obtenus, que ce soit sur la hauteur d'eau ou les vitesses de courant, sont en bon accord avec les données du Port Autonome de Rouen et nous assure que l'hydrodynamique de l'estuaire est correctement représentée.

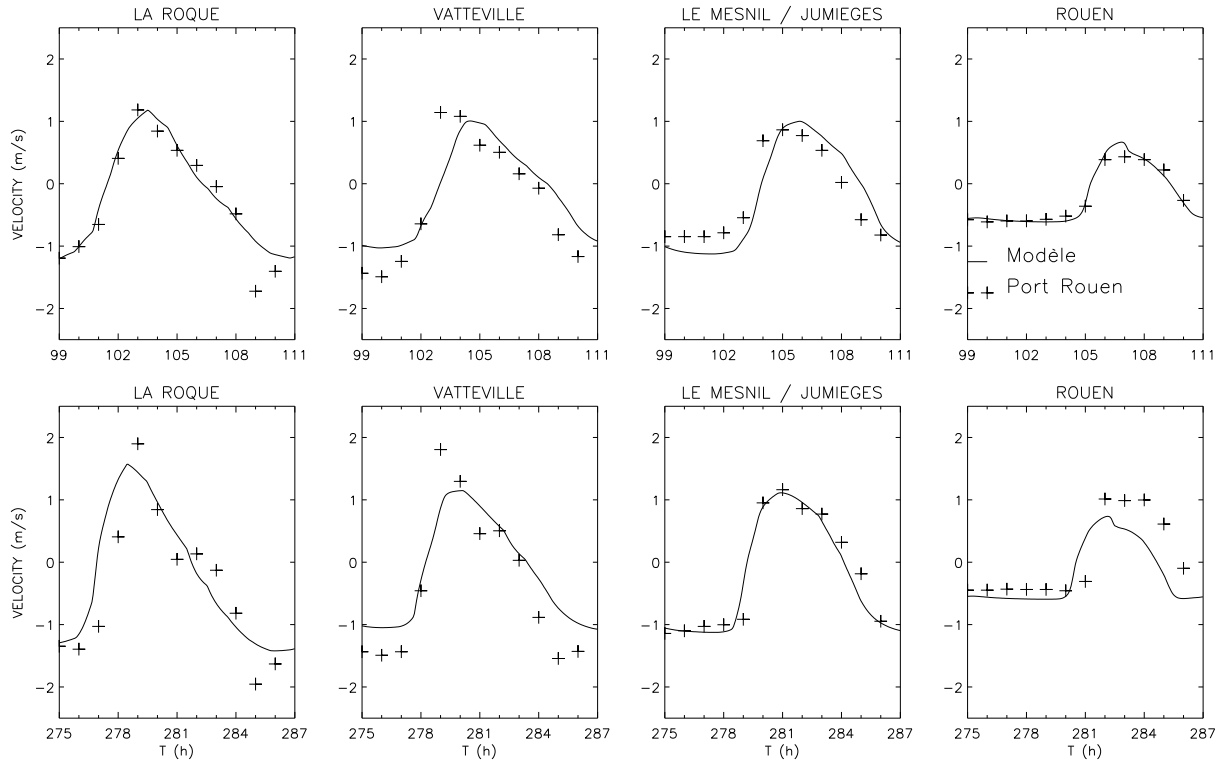


FIG. IV.7 – Vitesse moyenne du courant pour des marées de ME et de VE moyennes en différents points de sondage dans l'estuaire, comparaison avec les données du Port Autonome de Rouen

Après avoir calibré le modèle sur les données du S.H.O.M., nous avons effectué une simulation dans des conditions proches de celle du S.A.U.M. [Avoine et al. \(1980\)](#). La figure (Fig. IV.8) montre les résultats numériques (partie de gauche) et les observations du S.A.U.M. (partie de droite). Il a été observé que pendant les périodes de marée de ME et en condition d'étiage, la quantité de Matières En Suspension (MES) est faible avec une concentration maximum de l'ordre de $0,2 \text{ g.l}^{-1}$ [Avoine \(1981\)](#). Le "bouchon vaseux" n'est pas clairement formé. Sur les résultats numériques, une faible quantité de MES est prédite (moins de 0.1 g.l^{-1}) aux environs de Honfleur et le "bouchon vaseux" n'est pas formé.

La figure (Fig. IV.9) montre les résultats numériques et les observations en période de marée de VE. Les observations montrent un "bouchon vaseux" bien développé sur toute la colonne d'eau à BM et une décantation importante est observée à PM. La concentration est supérieure à 1 g.l^{-1} et le "bouchon vaseux" se déplace horizontalement sur une distance d'environ 15 km entre Honfleur et Tancarville pendant un cycle de marée. Le modèle numérique prédit également un "bouchon vaseux" bien formé avec des concentrations de l'ordre de 1 g.l^{-1} près du fond. Le centre du "bouchon vaseux" est situé à moins de 10 km de l'embouchure, près de Honfleur, à BM. Et il est situé à 20 km de l'embouchure à PM. Sur les résultats numériques, le "bouchon vaseux" se déplace sur environ 10 km pendant un cycle de marée. Ce qui est en accord correct avec les observations *in-situ*. Cependant, l'expansion verticale du "bouchon vaseux", particulièrement à BM n'est pas bien représenté par le modèle. Nous supposons que les interactions turbulentes sont responsables de ce phénomène.

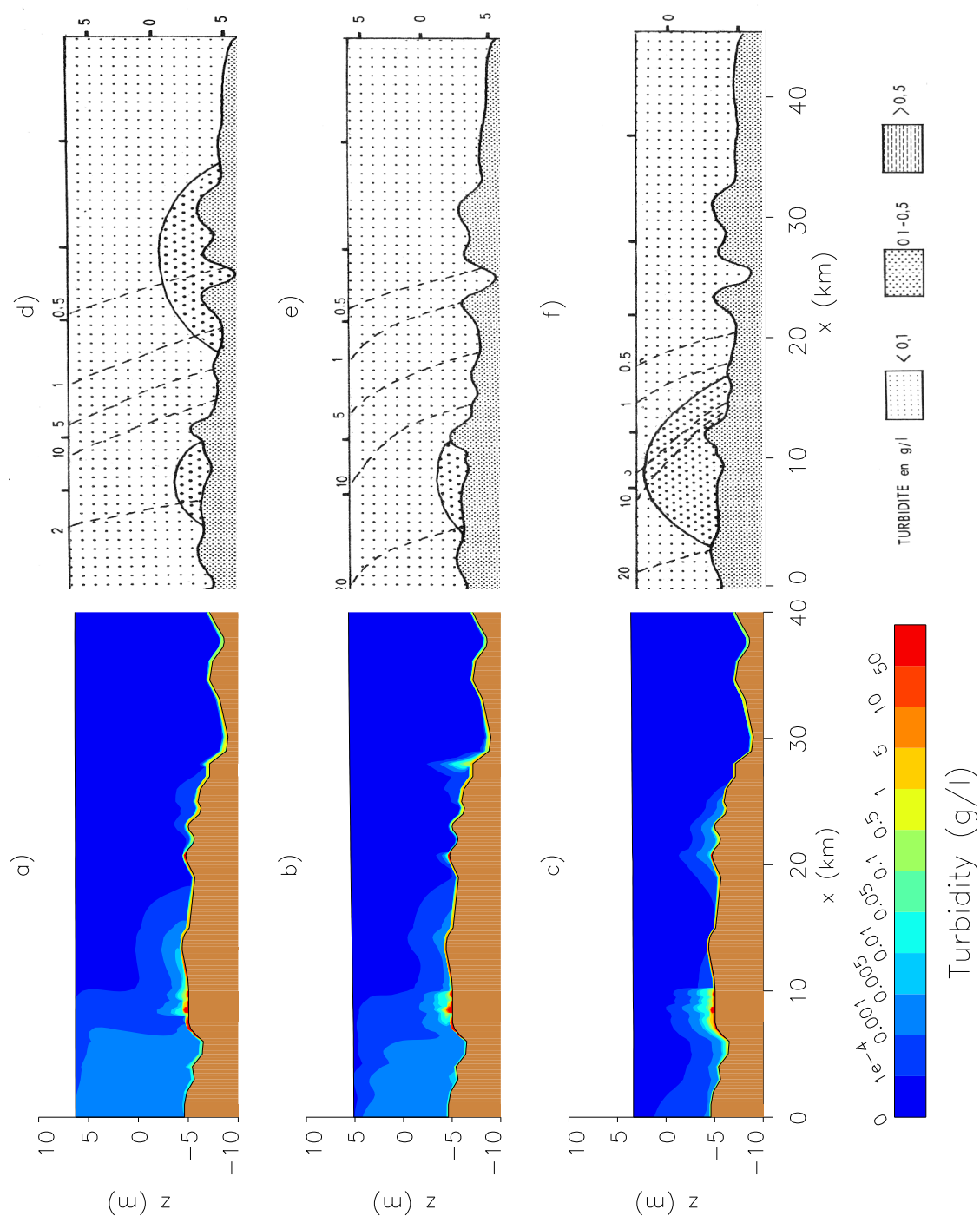


FIG. IV.8 – Isocontour de concentration en marée de ME. Modèle diphasique : a) PM, b) PM+3, c) BM ; SAUM : d) PM, e) PM+3, f) BM.

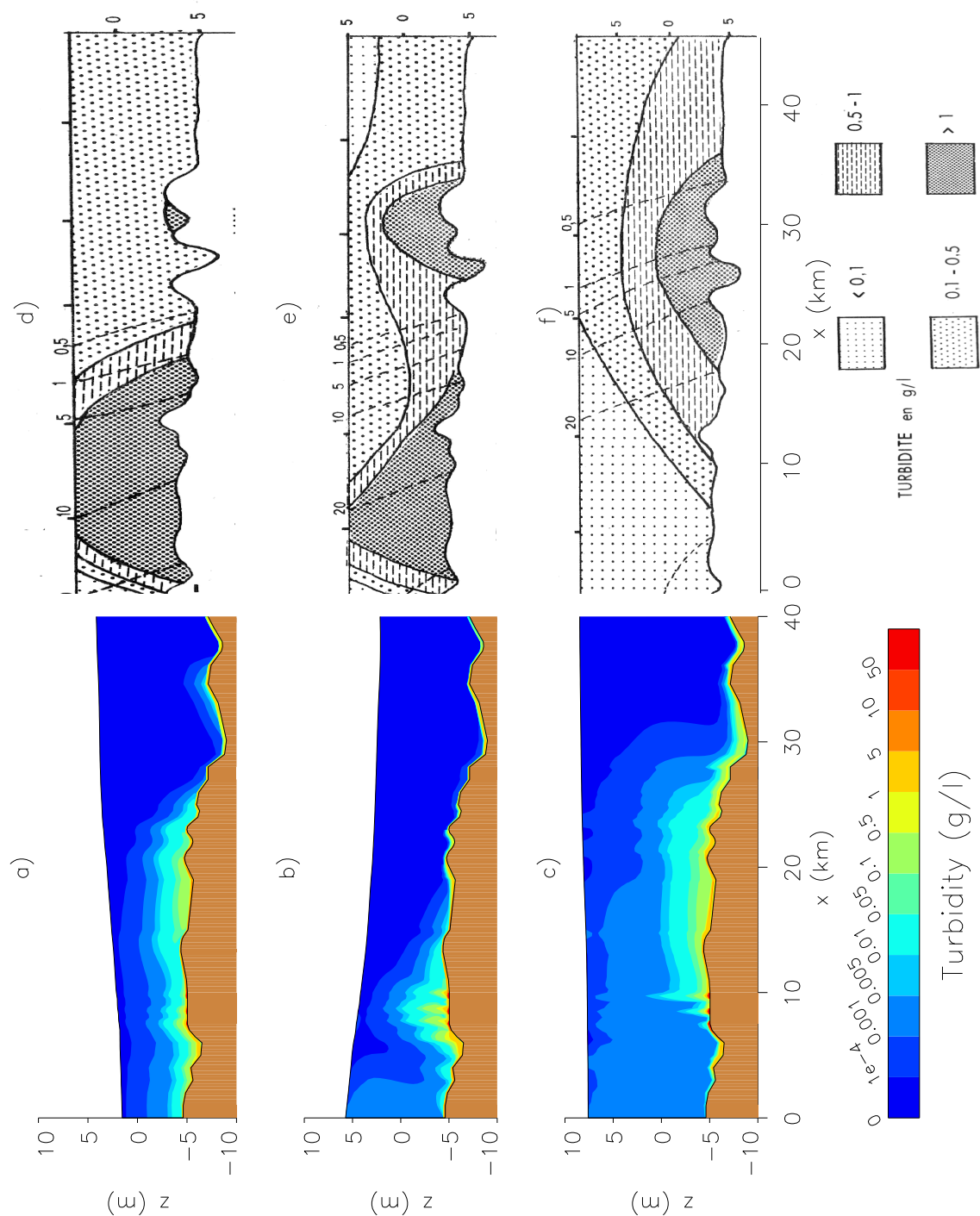


FIG. IV.9 – Isocontour de concentration en marée de VE. Modèle diphasique : a) PM, b) PM+3, c) BM ; SAUM : d) PM, e) PM+3, f) BM.

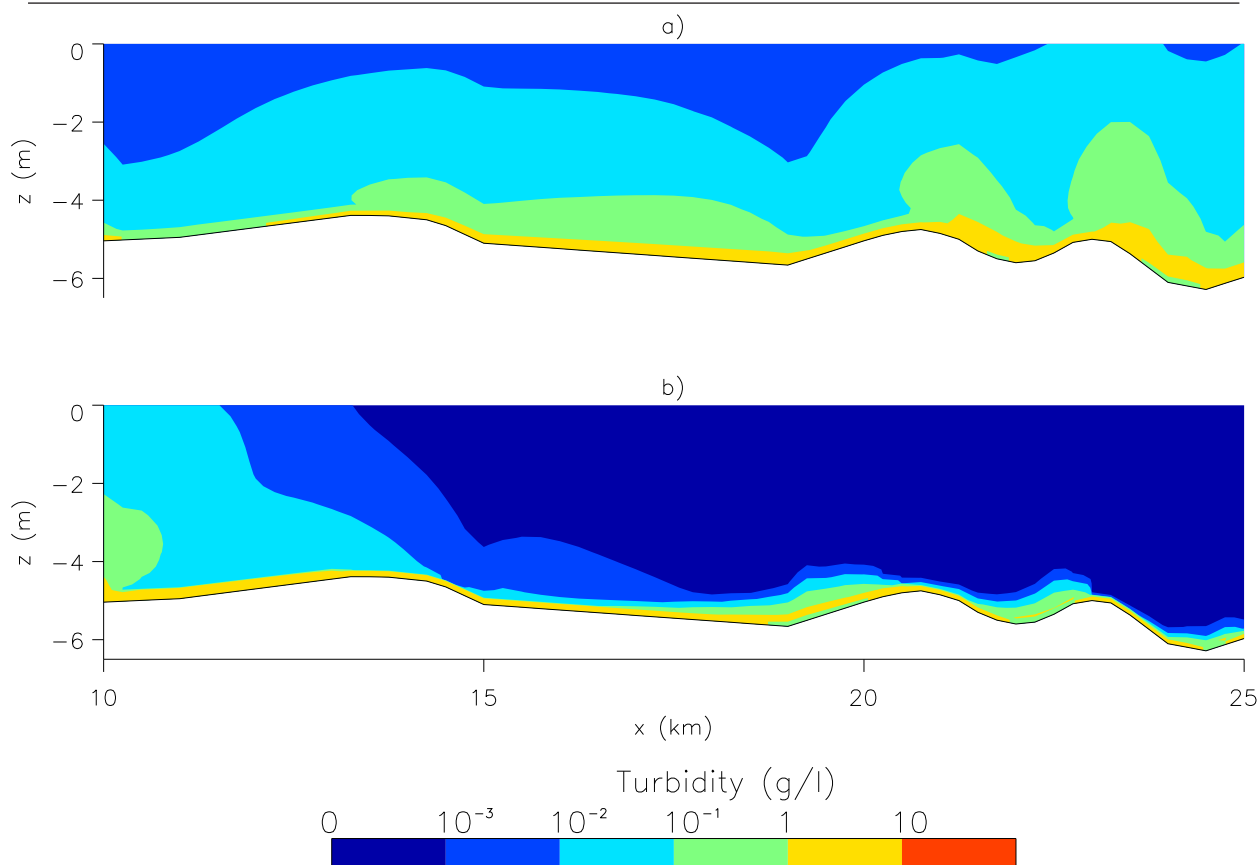


FIG. IV.10 – Zoom près du fond en marée de VE : a) PM, b) BM.

Sur la figure (Fig. IV.10) une couche de sédiments concentrés est observée. Cette couche échange des sédiments avec la colonne d'eau située au-dessus pendant un cycle de marée par les processus d'érosion et de dépôt. Celle-ci est située à 20 km environ de l'embouchure et se déplace avec la marée descendante sur une dizaine de kilomètres vers l'embouchure. Cette couche concentrée se déplace horizontalement sous l'influence des courants de marée et du débit du fleuve et joue le rôle d'un réservoir de sédiments pour le bouchon vaseux. Elle peut être assimilée à une couche de crème de vase associée au "bouchon vaseux". Ce point est particulièrement intéressant car il s'agit d'une des difficultés importantes dans l'approche classique de modélisation du transport sédimentaire. Ici il n'y a ni concentration de référence pour définir la transition entre le fond et la suspension, ni loi empirique pour décrire les flux d'érosion et de dépôt.

IV.5 Conclusion

Nous avons adapté le modèle diphasique de transport sédimentaire à l'estuaire de la Seine. Les résultats obtenus montrent que la formation du "bouchon vaseux" et son déplacement longitudinal sont en accord correct avec les mesures pour différentes conditions de marée. De plus, nous avons pu identifier une couche de sédiments concentrés pouvant s'apparenter à une couche de crème de vase. Ceci met en évidence l'un des intérêts majeurs de la modélisation diphasique du transport sédimentaire en estuaire : l'interaction entre la suspension et le fond sédimentaire est traitée de manière continue sans terme de transfert empirique. Comme nous l'avons mentionné dans le chapitre précédent, la modélisation de la turbulence et des interactions turbulentes constitue une difficulté importante de l'approche diphasique pour le transport sédimentaire en milieux estuariens.

Conclusion et perspectives

Ce travail constitue une contribution à la modélisation diphasique du transport sédimentaire en milieux côtiers et estuariens, et en particulier sur les phénomènes turbulents et de sédimentation. Pour ce faire une étude bibliographique de la modélisation diphasique a été réalisée. L'accent est mis sur la modélisation de la turbulence dans les écoulements à deux phases fluide-particule et sur la modélisation de la force de traînée. Ceci nous a conduit à choisir un modèle de turbulence du premier ordre, de type $k - \varepsilon$, pour la phase fluide et de type, $k_s^3 - k_{sf}^4$, pour la phase solide. Ce modèle ainsi que différentes approches de niveau de complexité moindre ont été intégrés dans le code de calcul à surface libre développé au cours de la thèse de [Barbry \(2000\)](#).

Plusieurs simulations, pour lesquelles des mesures existent, ont été réalisées pour couvrir l'ensemble des processus du transport de sédiments en milieux estuariens et côtiers. A savoir, l'écoulement fluide sur une dune sous-marine, la sédimentation en eau calme et le transport en suspension de particules. Pour finir une première application à l'estuaire de la Seine a été réalisée.

Les résultats obtenus mettent en évidence la cohérence de l'approche diphasique développée pour simuler les phénomènes de sédimentation et de transport en suspension dans le cas de particules non-cohésives. Ainsi, nous avons pu vérifier de manière quantitative le comportement d'une suspension dense en sédimentation et les effets de dispersion des particules par l'écoulement turbulent du fluide en écoulement dilué. Nous avons ainsi mis en évidence la capacité de cette approche à représenter les processus de sédimentation et de transport en suspension dans le cas de particules possédant une faible inertie. Ces résultats sont également en accord avec les profils analytiques proposés par [Rouse \(1937\)](#) et [Greimann et al. \(1999\)](#). Lorsque l'inertie est plus importante, les profils théoriques sont mis en défaut mais les résultats obtenus avec l'approche diphasique sont en accord avec les mesures expérimentales pour le profil de concentration. Les simulations sont réalisées sans calibration préalable de paramètres empiriques ce qui constitue une avancée dans le développement d'outils prédictifs pour la modélisation du transport sédimentaire. Nous montrons ainsi le bien-fondé de l'approche diphasique pour représenter les processus physiques. Ceux-ci ne peuvent être représentés dans l'approche classique du transport sédimentaire sans introduire de paramètres empiriques. Une originalité de l'approche réside dans le cadre bidimensionnel vertical qui permet d'envisager la simulation d'écoulements

³ k_s : énergie cinétique turbulente de la phase solide

⁴ k_{sf} : covariance des fluctuations de vitesse fluide-particule

non-uniformes et instationnaires.

Une première tentative de simulation hydrosédimentaire d'un estuaire réel avec un modèle diphasique bidimensionnel vertical a été présentée. Les problèmes rencontrés au cours de ce travail ne permettent pas, dans l'état actuel de nos connaissances, de réaliser des simulations avec un modèle de turbulence pour la phase solide dans ce cas. Les résultats obtenus montrent que la dynamique de l'estuaire est correctement reproduite, tant du point de vue hydrodynamique que du point de vue de la formation du bouchon vaseux. Les flux de matière entre une couche de particules fortement concentrée et la suspension sont simulés sans qu'aucune loi d'érosion ou de dépôt ne soit prescrite. Ceci constitue le point essentiel de ces simulations et illustre l'intérêt majeur de l'approche diphasique du transport sédimentaire en milieux estuariens.

Les écarts avec les mesures dans le cas de particules cohésives (vase) mettent en évidence la nécessité d'introduire une modélisation des processus spécifiques aux sédiments cohésifs. Les solutions envisagées portent sur l'introduction d'un modèle de floculation pour représenter les effets d'entravement ainsi que des lois rhéologiques complexes pour représenter les processus de structuration du lit de vase. L'introduction d'un modèle de floculation paraît être un aspect important à développer dans l'avenir. Nous avons présenté au chapitre I différentes approches possibles pour modéliser le processus de floculation. Le modèle de [Winterwerp \(1998\)](#) (Cf. annexe B.1), considérant un diamètre équivalent des particules évoluant dans l'espace et le temps, semble être un bon compromis pour une intégration au modèle diphasique de transport sédimentaire. Une autre solution serait de réaliser un modèle "multiclasse" de particules. L'idée consiste à introduire N phases solides possédant chacune un diamètre moyen différent. La granulométrie est alors représentée par la fraction de volume de chacune de ces classes. Il serait alors possible de résoudre directement le système d'équations proposé par [Smoluchowski \(1917\)](#) (Eq. I.5). Cette approche suppose la modélisation des interactions entre les différentes classes de particules et nécessiterait un travail conséquent. Les propriétés rhéologiques spécifiques des sédiments cohésifs pourraient être modélisées par des lois rhéologiques de type fluide à seuil comme le modèle de [Bingham \(1922\)](#) ou plus complexes en prenant en compte le caractère rhéofluidifiant des vases, par une loi de type [Herschel and Bulkley \(1926\)](#).

Les simulations réalisées sur le canal hippodrome montrent les limites de la modélisation proposée, principalement les problèmes liés à la présence d'un fond sédimentaire. Nous pensons que les pistes à explorer pour combler ces lacunes résident dans la modélisation de la turbulence dans les milieux denses ($\alpha_s > 10^{-3}$) :

- modélisation des termes de transferts d'énergie cinétique turbulente (pour k_f et ε_f en particulier)
- description plus fines des effets collisionnels.

Une approche résolvant une équation de transport pour chaque composante des tenseurs de corrélation des fluctuations de vitesse et pour la vitesse de dérive pourrait être envisagée pour s'affranchir de l'hypothèse d'isotropie de la turbulence. Ce type de modèle pourrait être utilisé pour des simulations à plus petite échelle (expérience de laboratoire) et permettrait sûrement d'améliorer la compréhension des processus turbulents près du

fond et leur paramétrisation dans les modèles d'ordre inférieur (modèle $k_s - k_{fs}$).

Bibliographie

- Allen, G. P. (1971), Déplacements saisonniers de la lentille de "crème de vase" dans l'estuaire de la Gironde, *C. R. Acad. Sci.*, 273, 2429–2431. [16](#)
- Allen, G. P. (1972), Etat des processus sédimentaires dans l'estuaire de la Gironde, Ph.D. thesis, Université de Bordeaux. [143](#)
- Almeida, G., D. Durão, and M. Heitor (1993), Wake flows behind two-dimensional model hills, *Experimental Thermal and Fluid Science*, 7, 87–101. [89](#)
- Amoudry, L., T. J. Hsu, and L. F. Liu (2005), Schmidt number and near-bed boundary condition effects on a two-phase dilute sediment transport model, *J. Geophys. Res.*, 110, 12. [25](#), [29](#), [118](#)
- Anderson, T. B., and J. Jackson (1967), A fluid mechanical description of fluidized beds, *Ind. Eng. Chemical Fundamental*, 6, 527–539. [30](#)
- Ariathurai, C. R., and K. Arulanandan (1977), Erosion rates of cohesive soils, *Journal of Hydraulic Division*, 104, 279–283. [17](#)
- Avoine, J. (1981), l'estuaire de la Seine : sédiments et dynamique sédimentaire, Ph.D. thesis, Université de Caen. [145](#), [158](#)
- Avoine, J., J. Dupont, and F. David (1980), Etudes hydrosédimentaires, étude des suspensions, programme géochimie, analyses par activation neutronique, *Tech. rep.*, Université de Caen. [145](#), [154](#), [158](#)
- Bagnold, R. A. (1973), The nature of saltation and "bed load" transport in water, in *Proceedings of the Royal Society*, pp. pp. 473–504. [14](#)
- Balzer, G., A. Boëlle, and O. Simonin (1995), Eulerian gas-solid flow modelling of dense fluidized bed, in *Fluidization VIII, Int. Symp. of the Engineering Foundation*, pp. 1125–1134. [69](#)
- Barbry, N. (2000), Modélisation du transport sédimentaire en milieux estuariens selon une approche diphasique (fluide-particule), Ph.D. thesis, Université de Caen. [9](#), [11](#), [29](#), [30](#), [35](#), [36](#), [37](#), [39](#), [46](#), [47](#), [81](#), [148](#), [163](#), [179](#), [205](#)

- Barbry, N., S. Guillou, and K. D. Nguyen (2000), Une approche diphasique pour le calcul du transport sédimentaire en milieux estuariens, *C. R. Acad. Sci. (série II B)*, 328, 793–799. [25](#), [29](#), [30](#), [140](#)
- Batchelor, G. K. (1948), Diffusion in a field of homogeneous turbulence ii. the relative motion of particles, in *Cambridge Phil. Soc.*, vol. 48, pp. 345 – 362. [70](#)
- Been, K., and G. C. Sills (1981), Self-weight consolidation of soft soils : an experimental and theoretical study, *Géotechnique*, 31, 519–535. [105](#)
- Bel Fdhila, R., and O. Simonin (1992), Eulerian prediction of a turbulent bubbly flow downstream of a sudden pipe expansion, in *Proceedings 5th Workshop on Two-Phase Flow Predictions*, pp. pp. 264–273. [26](#), [64](#)
- Bingham, E. C. (1922), *Fluidity and Plasticity*, McGraw Hill, New York. [164](#)
- Blumberg, A. F., and G. L. Mellor (1987), A description of a three-dimensional coastal ocean circulation model - three-dimensionnal coastal ocean models, *Coastal and estuarine Sciences*. [16](#)
- Boëlle, A., G. Balzer, and O. Simonin (1994), Application d’une modélisation à deux fluides à la prédiction des lits fluidisés denses, *He-44/94/017a*, Laboratoire National d’Hydraulique, EDF. [68](#), [75](#)
- Boericke, R. R., and J. M. Hogan (1977), An x-z hydraulic/thermal model for estuaries, *Hydraulic Division*, 103, 19–37. [16](#)
- Bonnin, J., T. Buchal, and W. Rodi (1995), Ercoftac workshop on data bases and testing of calculation methods for turbulent flows, in *ERCOFTAC Bulletin*, pp. 48–54. [89](#), [95](#)
- Brenon, I., and P. Le Hir (1999), Modelling the turbidity maximum in the Seine estuary (France) : identification of formation processes, *Estuarine coastal and shelf science*, 49, 529 – 544. [145](#)
- Chapman, S., and T. G. Cowling (1970), *The mathematical theory of non-uniform gases*, Cambridge. [28](#), [61](#), [62](#)
- Charles, I. (2002), Modélisation numérique 2dv, sans approximation hydrostatique, pour les estuaires, rapport de stage de D.E.A., Université de Caen. [145](#)
- Chauchat, J., S. Guillou, and K. Nguyen (2005), Ecoulement turbulent sur une dune sous-marine : Etude numérique, in *XVIIème Congrès Français de Mécanique*, p. 6 p. [85](#)
- Chauchat, J., S. Guillou, and K. Nguyen (2006a), Numerical simulation of the water-sediment mixed flow in a periodic channel by a two-phase model, in *Flow simulation in hydraulic engineering / Dresdner Wasserbaukolloquium*, edited by H.-B. Horlacher and K.-U. Graw, pp. 229–236. [131](#), [133](#), [137](#)

- Chauchat, J., S. Guillou, and K. Nguyen (2006b), Simulation de la sédimentation d'une suspension de sphère par un modèle diphasique, in *41eme Colloque annuel du Groupe Français de Rhéologie*, pp. 79–82. [96](#)
- Chauchat, J., S. Guillou, and K. Nguyen (2006c), Etude de la sédimentation dans un canal hippodrome avec un modèle à deux phases, *Tech. rep.*, Université de Caen - CETMEF. [125](#), [133](#), [137](#)
- Chauchat, J., S. Guillou, and K. Nguyen (2007a), Etude de la sédimentation et du transport en suspension dans un canal hippodrome avec un modèle à deux phases, *Tech. rep.*, Université de Caen - CETMEF. [125](#)
- Chauchat, J., S. Guillou, and K. Nguyen (2007b), A 2d vertical two-phase flow model for sediment laden flows, in *European Geophysical Union*. [110](#)
- Chauchat, J., S. Guillou, D. Pham Van Bang, and K. Nguyen (2007c), Modélisation diphasique de la dispersion turbulente dans le transport en suspension de particules sédimentaires, in *XVIIIème Congrès Français de Mécanique*, p. 6 p. [110](#)
- Chorin, A. J. (1968), Numerical simulation of Navier-Stokes equations, *Math. Comput.*, *22*, 745–762. [35](#), [205](#)
- Clift, R., and W. Gauvin (1970), The motion of particles in turbulent gas streams, in *Proc. Chemeca '70*, pp. 1–14. [50](#), [51](#), [54](#)
- Cole, P., and G. V. Miles (1983), Two-dimensional model of mud transport, *J. Hydraulic Engineering, ASCE*, *109*(1), 1–12. [16](#)
- Csanady, G. (1963), Turbulent diffusion of heavy particles in the atmosphere, *J. Atm. Science*, *20*, 201 – 208. [58](#), [72](#)
- Csanady, G. T. (1973), *Turbulent diffusion in the environment*, Geophysics and Astrophysics Monographs, D. Reidel Publishing Company, London. [70](#)
- Cugier, P. (1999), Modélisation du devenir à moyen terme dans l'eau et le sédiment des éléments majeurs (n, p, si) rejetés par la Seine dans la baie de Seine, Ph.D. thesis, Université de Caen. [16](#), [17](#)
- De Borne de Grandpré, C. (1979), Modèle bidimensionnel en temps réel de la circulation verticale estuarienne. Application à la Gironde, *Oceanol. Acta*, *2*(1), 61 – 68. [16](#)
- Deschamps, V. (1988), Simulation numérique de la turbulence inhomogène incompressible dans un écoulement de canal plan, *Tech. rep.*, ONERA. [126](#), [127](#)
- Deutsch, E., and O. Simonin (1991), Large eddy simulation applied to the motion of particles in stationary homogeneous fluid turbulence, *Turbulence Modification in Multiphase Flows ASME-FED*, *110*, 35 – 42. [55](#), [71](#), [72](#), [73](#), [115](#)

- Di Felice, R. (1994), The voidage function for fluid-particle interaction systems, *Int. J. Multiphase Flow*, 20, 153 – 159. [52](#), [179](#)
- Dietrich, W. E. (1982), Settling velocity of natural particles, *Water Resour. Res.*, 18, 1615–1626. [51](#), [54](#), [111](#)
- Drew, D. A. (1976), Production and dissipation of energy in the turbulent flow of a particule-fluid mixture, with some results on drag reduction, *J. Appl. Mech.*, 43. [29](#), [47](#)
- Drew, D. A. (1983), Mathematical modelling of two-phase flow, *J. Appl. Mech.*, 15, 261–291. [29](#)
- Drew, D. A., and R. T. Lahey (1993), *Analytical modelling of multiphase-flow, Particulate two-phase flows*, chap. 16, pp. 509 – 566, Butterworth-Heinemann series on chemical engineering, Rocco. [25](#), [31](#), [32](#), [42](#), [45](#), [46](#), [48](#)
- Einstein, A. (1906), Eine neue bestimmung der molekuldimensionen, *An. Phys.*, 19, 289 – 306. [33](#)
- Eisma, D. (1992), *Suspended matter in the aquatic environment*, 315 p. pp., Springer-Verlag, Berlin. [15](#)
- Elghobashi, S., and T. Abou-Arab (1983), A two-equation turbulence model for two-phase flows, *Phys. Fluids*, 26, 931 – 938. [78](#)
- Elgobashi, S. E. (1991), Particle-laden turbulent flows : Direct. numerical simulation and closure models, *Applied Scientific Research*, 48, 301–314. [58](#), [59](#), [133](#), [179](#)
- Elgobashi, S. E., and G. C. Truesdell (1993), On the two-way interaction between homogeneous turbulence and dispersed solid particles. i : Turbulence modification, *Physics of Fluids A*, 5, 1790–1801. [120](#)
- Enwald, H., E. Peirano, and A.-E. Almstedt (1996), Eulerian two-phase flow theory applied to fluidization, *Int. J. Multiphase Flow*, 22, 21 – 66. [32](#), [47](#), [75](#)
- Escudier, M. (1966), The distribution of mixing length in turbulent flow near walls, *Heat transfer section Report TWF/TN/1*, Imperial College. [155](#)
- Favre, A. (1965), Equations des gaz turbulents compressibles, *J. Mec.*, 4. [29](#)
- Faxen, H. (1923), Die Bewegung einer starren Kugel langs der Achse eines mit zäher Flüssigkeit gefüllten Rohres, *Arkiv. Mat. Astron. Fys.*, 27. [49](#)
- Freson, I. (2004), Simulation numérique du clapage en mer. Etude du champ proche : chute et transport sur le fond, Ph.D. thesis, Université de Compiègne. [29](#)
- Fu, X., G. Wang, and X. Shao (2005), Vertical dispersion of fine and coarse sediments in turbulent open-channel flows, *J. Hydraulic. Eng.- ASCE*, 131, 877 – 887. [30](#)

- Galland, J., N. Goutal, and J. Hervouet (1991), Telemac : A new numerical model for solving shallow water equations, *Adv. Water Resources*, 14(3), 138–148. [16](#)
- Galland, J. C., D. Laurence, and C. Teisson (1994), Simulating turbulent vertical exchanges of mud with a reynolds stress model, in *4th Nearshore and Estuarine Cohesive Sediment Transport Conference, Intercoh'94*, pp. 449–448. [22](#)
- Gallene, B. (1974), Les accumulations turbides de l'estuaire de la Loire. Etude de la crème de vase, Ph.D. thesis, Université de Nantes, Institut des Sciences de la Nature. [16](#)
- Gibson, R. E., G. L. Englund, and M. J. L. Hussey (1967), The theory of one-dimensional consolidation of saturated clays, *Géotechnique*, 17, 261 – 273. [16](#), [22](#), [24](#)
- Glangeaud, L. (1939), Le rôle de la suspension tourbillonnaire et de la traction sur le fond dans la formation des sédiments de la Gironde, *C. R. Acad. Sci.*, 208, 1595. [15](#)
- Grad, H. (1949), On the kinetic theory of rarefied gas, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 2, 331–407. [28](#), [60](#), [66](#), [67](#)
- Graham, A. L. (1981), On the viscosity of suspensions of solide spheres, *Applied Science Research*, 37, 275 – 286. [32](#), [81](#)
- Greimann, B., and F. Holly (2001), Two-phase flow analysis of concentration profile, *J. Hydraulic. Eng.- ASCE*, 127, 753 – 761. [25](#), [28](#), [118](#)
- Greimann, B. P., M. Muste, and F. M. H. Jr. (1999), Two-phase formulation of suspended sediment transport, *J. Hydraul. Res.*, 37, 479 – 500. [25](#), [27](#), [29](#), [78](#), [114](#), [115](#), [116](#), [117](#), [118](#), [119](#), [131](#), [163](#), [180](#), [185](#)
- Guillou, S. (1996), Modélisation des écoulements côtiers et estuariens. Etude mathématique et applications en coordonnées généralisées, Ph.D. thesis, Université de Paris VI. [16](#), [35](#), [209](#)
- Guillou, S. (2005), Simulations des écoulements de fluides complexes en conduites et en milieux environnementaux, Habilitation à diriger des recherches, Université de Caen. [126](#)
- Guillou, S., and R. Makhloufi (2002), Direct numerical simulation of an incompressible channel flow in presence of an additive, in *Proceedings of the 11th International Conference Transport and Sedimentation of Solid Particles*, edited by J. S. et R. Verhoeven. [126](#)
- Guillou, S., and K. D. Nguyen (1999), An improved technique for solving two-dimensional shallow water problems, *Int. J. for Num. Meth. in Fluids*, 29, 465–483. [35](#), [209](#)
- Guillou, S., N. Barbry, and K. D. Nguyen (2000), Calcul numérique des ondes de surface par une méthode de projection et un maillage eulérien adaptatif, *C. R. Acad. Sci. (série II B)*, 328, 875–881. [31](#), [89](#)

- Haider, A., and O. Levenspiel (1989), Drag coefficient and terminal velocity of spherical and non-spherical particles, *Powder Technology*, 58, 63–70. [54](#), [111](#)
- Haidvogel, D. B., and A. Beckmann (1999), *Numerical Ocean Circulation Modeling*, 318 pp., Imperial College Press. [16](#)
- Hamilton, P. (1975), A numerical model of vertical circulation of tidal estuaries and its application to the Rotterdam waterways, *Geophys. J. R. Astron. soc.*, 40, 1–21. [142](#)
- Happel, J., and H. Brenner (1973), *Low Reynolds number hydrodynamics*, 552 P ; pp., Martinus Nijhof, The Hague. [49](#)
- Harlow, F. H., and J. E. Welch (1965), Numerical calculation of time-dependant viscous incompressible flow of fluid with free surface, *J. Phys. Fluids*, 8, 2182–2189. [35](#), [209](#)
- Hayter, E. J. (1983), Prediction of cohesive sediment movement in estuarial waters, Ph.D. thesis, Coastal & oceanographic Engineering Department, University of Florida. [15](#)
- Herschel, H., and R. Bulkley (1926), Konsistenzmessungen von Gummi-Benzollösungen, *Colloid & Polymer Science*, 39, 291–300. [164](#)
- Hinze, J. O. (1975), *Turbulence*, McGraw Hill, New York. [70](#), [71](#)
- Hsu, T., J. T. Jenkins, and L. F. Liu (2003), On two-phase sediment transport : Dilute flow, *J. Geophys. Res.*, 108, 14. [25](#), [29](#), [47](#), [118](#)
- Ishii, M. (1975), *Thermo-fluid dynamic theory of two-phase flow*, Eyrolles. [39](#), [40](#)
- Ishii, M., and N. Zuber (1979), Drag coefficient and relative velocity in bubbly, droplet or particulate flows, *AiChe J.*, 25, 843–855. [52](#)
- Janin, J. M., F. Lepeintre, and P. Pechon (1992), Telemac3d : a finite element code to solve 3d free surface flow problems, in *Proceedings of Computer modelling of Seas and Coastal Regions*, Southampton. [16](#)
- Jenkins, J. T., and M. W. Richman (1985), Grad’s 13-moment system for a dense gas of inelastic spheres, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 87, 355–377. [60](#), [62](#), [67](#), [68](#), [79](#)
- Jiang, J., A. W.-K. Law, and N.-S. Cheng (2004), Two-phase modeling of suspended sediment distribution in open channel flows, *J. Hydraul. Res.*, 42, 273 – 281. [25](#), [29](#)
- Jouanneau, J. M., and C. Latouche (1981), The Gironde estuary, in ., edited by J. D. M. H. Fuchtbauer, A. P. Lisitzyn and E. Seibold, p. 115, . [15](#)
- Kaftori, D., G. Hestroni, and S. Banerjee (1996), Particle behavior in the turbulent boundary layer. velocity and distribution profiles, *Phys. Fluids*, 7, 1107 – 1121. [28](#), [111](#)

- Kiger, K. T., and C. Pan (2002), Suspension and turbulence modification effects of solid particulates on a horizontal turbulent channel flow, *J. Turbulence*, 19, 1 – 21. [111](#)
- Krone, R. B. (1962), Flume studies of the transport of sediment in estuarial shoaling processes, *Final report*, University of California, Berkeley. [16](#), [21](#)
- Kynch, G. (1952), A theory of sedimentation, *Transactions Faraday Society*, 48, 166–176. [16](#), [22](#), [23](#)
- Lau, Y. L., and B. G. Krishnappan (1994), Does reentrainment occur during cohesive sediment settling, *J. of Hydraulic Engineering*, 120, 236–243. [22](#)
- Le Hir, P. (1994), Fluid and sediment "integrated" modelling application to fluid mud flows in estuaries, in *4th Nearshore and Estuarine Cohesive Sediment Transport Conference, IntercoH'94*, pp. 417–428. [25](#), [26](#)
- Le Hir, P., and P. Cugier (1994), Modélisation intégrée eau/sédiment : une nouvelle tendance ? Développement autour d'un modèle unidimensionnel vertical, in *Actes des III Journées Nationales Génie Côtier Génie Civil*, pp. 81–87. [25](#), [26](#)
- Lenormand, C., F. Lepeintre, C. Teisson, A. Macherek, M. Markofsky, and W. Zielke (1993), Three dimensional modeling of estuarine processes, in *MAST days and Euromar Market*, pp. pp. 223–237. [17](#)
- Lenormand, E., P. Sagaut, and L. Ta Phuoc (2000), Large eddy simulation of subsonic and supersonic channel flow at moderate reynolds number, *International Journal for Numerical Methods in FLuids*, 32, 369–406. [126](#)
- Lesourd, S. (2000), Processus d'envasement d'un estuaire macrotidal : zoom temporel du siècle à l'heure ; Application à l'estuaire de la Seine, Ph.D. thesis, Université de Caen. [16](#)
- Leupi, C. (2005), Numerical modeling of cohesive sediment transport and bed morphology in estuaries, Ph.D. thesis, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne. [131](#)
- Li, Z. H. (1994), Modélisation numérique du transport des sédiments remis en suspension dans un estuaire - Application à la Gironde, Ph.D. thesis, Université de Paris VI. [16](#)
- Li, Z. H., K. D. Nguyen, J. C. Brun-Cottan, and J. M. Martin (1994), Numerical simulation of the turbidity maximum transport in the Gironde estuary (France), *Oceanologica Acta*, 17. [16](#), [143](#)
- Lowery, K., and S. Liapis (1999), Free-surface flow over a semi-circular obstruction, *International Journal for Numerical Methods in FLuids*, 30, 43–63. [91](#), [92](#), [179](#)
- Lucquin, B., and O. Pironneau (1996), *Introduction au calcul scientifique*, pp. 213–245, Masson. [209](#)

- Lundgren, T. (1972), Slow flow through stationary random beds and suspensions of spheres, *J. Fluid Mech.*, *51*, 273–299. [33](#)
- Ma, D., and G. Ahmadi (1986), An equation of state for dense rigid sphere gases, *Journal of Chemical Physics*, *84*, 3449–3450. [69](#)
- McTigue, D. F. (1981), Mixture theory for suspended sediment transport, *J. Hydraul. Div. Am. Soc. Civ. Eng.*, *107*. [47](#)
- Mehta, A. J. (1988), Laboratory studies on cohesive sediment deposition and erosion, in *Physical Processes in Estuaries*, edited by J. Dronker and W. V. Leussen, pp. 427–445, Springer, Berlin. [21](#)
- Mehta, A. J. (1991), Understanding fluid mud in a dynamic environment, *Geo-Marine Letters*, *11*, 113–118. [21](#)
- Mehta, A. J., E. J. H. abd W. R. Parker, R. B. Kron, and A. M. Teeter (1989), Cohesive sediment transport i : process description, *J. Hydraul. Eng.*, *115*, 1076–1093. [14](#), [179](#)
- Mei, R. (1992), An approximate expression for the shear liftforce on a spherical particle at finite reynolds number, *Int. J. Multiphase Flow*, *18*, 145 – 147. [48](#)
- Mewis, J., and A. Spaul (1976), Rheology of concentrated suspensions, *Advances in Colloid and interface Science*, *6*, 173 – 200. [15](#)
- Migniot, C. (1968), Etudes des propriétés physiques des différents sédiments très fins et de leur comportement, *La Houille Blanche*, *7*, 591–620. [16](#), [22](#)
- Mohammadi, B., and O. Pironneau (1994), *Analysis of the $K-\varepsilon$ turbulence model*, Wiley. [76](#)
- Movahedan, M., and M. Bélorgey (2005), Ecoulement sur une dune sous-marine : Etude expérimentale, *Congrès Français de Mécanique*. [85](#), [90](#)
- Muste, M., and V. C. Patel (1997), Velocity profiles for particles and liquid in open-channel flow with suspended sediment, *J. Hydraulic. Eng.- ASCE*, *123*, 742 – 751. [28](#)
- Muste, M., K. Yu, I. Fujita, and R. Ettema (2005), Two-phase versus mixed-flow perspective on suspended sediment transport in turbulent channel flows, *Water Resour Res*, *41*, 22. [30](#), [110](#), [111](#), [114](#), [115](#), [116](#), [117](#), [119](#), [120](#), [140](#), [180](#)
- Nezu, I., and H. Nakagava (1993), *Turbulence in Open-channel flows*, IAHR. [27](#), [131](#)
- Nguyen, K. D. (1988), Modélisation numérique 2-d et 3-d de la circulation générale en milieux estuariens et côtiers : application à la Gironde, Ph.D. thesis, Université de Paris VI. [16](#)

- Nicholson, J., and B. O'Connor (1986), Cohesive sediment transport model, *J. of Hydraulic Engineering*, 112, 621–640. [17](#)
- Oseen, C. W. (1910), Über die stokesche Formel und über eine verwandte Aufgabe in der Hydrodynamik, *Ark. Mat. Astronom. Fys.*, 6, 154–155. [18](#), [50](#)
- Parker, R. (1986), On the observation of cohesive sediment behaviour for engineering purposes, in *Estuarine Cohesive Dynamics, Lecture notes on Coastal and Estuarine studies*, vol. 14, pp. pp. 270–289, Springer - Verlag. [14](#), [179](#)
- Partheniades, E. (1962), A study of erosion and deposition of cohesive soils in salt water, Ph.D. thesis, University of California, Berkeley. [15](#), [21](#)
- Partheniades, E. (1965), Erosion and deposition of cohesive soils, *Journal of Hydraulic Division*, 91, 105–137. [16](#)
- Patankar, S. V. (1980), *Numerical heat transfer and fluid flow*, Hemisphere Publishing Corporation. [209](#)
- Peirano, E. (1996), Department of energy conversion, unpublished work. [73](#)
- Peirano, E., and B. Leckner (1998), Fundamentals of turbulent gas-solid flows applied to circulating fluidized bed combustion, *Prog. Energy Combust. Sci.*, 24, 259–296. [46](#), [57](#), [65](#), [66](#), [72](#), [73](#), [79](#)
- Pham Van Bang, D., E. Lefrançois, G. Ovarlez, and F. Bertrand (2006), Mri experimental and 1d fe-fct numerical investigation of the sedimentation and consolidation., in *7th International Conference on Hydroinformatics*. [97](#)
- Phan, N. V. (2002), Modélisation numérique tridimensionnelle de la circulation générale, de l'intrusion saline et du transport sédimentaire dans l'estuaire de la Gironde (France), Ph.D. thesis, Université de Caen. [17](#)
- Phillips, N. A. (1957), A coordinate system having some special advantages for numerical forecasting, *Journal Of Meteorology*, 14, 184–185. [31](#), [148](#)
- Prandtl, L. (1925), Über die ausgebildete Turbulenz, *ZAMM*. [155](#)
- Richardson, J. F., and W. N. Zaki (1954), Sedimentation and fluidization : Part i, *Trans. Instn. Chem. Engrs*, 32. [19](#)
- Ro, K. S., and J. B. Neethling (1990), Terminal settling characteristics of bioparticles, *Res. J. Water Pollut. Control Fed.*, 62, 901–906. [53](#)
- Rouas, G. (1996), Etude et modélisation par éléments finis des processus hydrosédimentaires estuariens, Ph.D. thesis, Université Technologique de Compiègne. [26](#), [124](#), [125](#), [131](#)

- Rouse, H. (1937), Modern conceptions of the mechanics of turbulence, *Trans. Am. Soc. Civ. Eng.*, 102, 463 – 505. [28](#), [29](#), [114](#), [115](#), [116](#), [117](#), [119](#), [163](#), [180](#)
- Saffman, P. G. (1965), The lift on a small sphere with a slow shear flow, *J. Fluid Mech.*, 22, 385 – 400. [47](#)
- Saffman, P. G. (1968), Corrigendum to : “the lift on a small sphere with a slow shear flow”, *J. Fluid Mech.*, 31. [47](#), [48](#)
- Sajjadi, S. G., T. J. Craft, and Y. Feng (2001), A numerical study of turbulent flow over a two-dimensional hill, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 35, 1–23. [95](#)
- Sanford, L. P., and J. P. Halka (1993), Assessing the paradigm of mutually exclusive erosion and deposition of mud, with examples from upper Cheasapeake bay, *Marine Geology*, 114, 37–57. [22](#)
- Schiller, L., and A. Naumann (1933), Über die Grundlegenden Berechnungen bei der Schwerkraftaufbereitung, *Ver. Deut. Ing.*, 77. [18](#), [50](#), [52](#), [53](#)
- Simonin, O. (1991), Prediction of the dispersed phase turbulence in particule-laden jets, *Gas-Solid Flows ASME-FED*, 121, 197 – 206. [26](#), [27](#), [75](#), [78](#)
- Simonin, O., and P. L. Violette (1990), Numerical study on phase dispersion mechanisms in turbulent bubbly flows, in *Proceedings 5th Workshop on Two-Phase Flow Predictions*, pp. 156–166. [55](#), [70](#), [74](#), [75](#), [77](#), [78](#), [79](#)
- Simonin, O., E. Deutsch, and M. Boivin (1995), Large eddy simulation and second moment closure model of particle fluctuating motion in two-phase turbulent shear flows, *He-44/94/035/a*, Laboratoire National d’Hydraulique, EDF. [73](#), [75](#)
- Smoluchowski, M. . (1917), Versuch einer Mathematischen Theorie der Koagulationskinetic Kolloid Lösungen, *Zeitschrift für Physikalische Chemie*, 92, 129–168. [19](#), [20](#), [164](#)
- Stansby, P. K., and J. G. Zhou (1998), Shallow-water flow solver with non-hydrostatic pressure : 2d vertical plane problems, *Int. J. for Num. Meth. in Fluids*, 28, 541–563. [89](#)
- Stokes, G. G. (1851), On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums, in *Trans. Cambr. Phil. Soc.*, vol. 9, pp. 87–104. [49](#), [50](#)
- Sumer, B. M., and R. Deigaard (1981), Particles motions near the bottom in turbulent flow in an open channel : part 2, *J. Fluid Mech.*, 109, 311 – 337. [111](#)
- Tambo, N., and Y. Watanabe (1979), Physical characteristics of flocs i : The floc density function and aluminium floc, *Water Research*, 13, 409 – 419. [19](#)

- Tchen, C. M. (1947), Mean value and correlation problems connected with the motion of small particles suspended in a turbulent fluid, Ph.D. thesis, Delft University of Technology. [55](#), [71](#), [72](#), [73](#), [74](#), [78](#), [80](#), [115](#), [123](#)
- Teisson, C., O. Simonin, J. C. Galland, and D. Laurence (1992), Turbulence and mud sedimentation : A reynolds stress model and a two-phase flow model, in *Proceedings of 23rd International Conference on Coastal Engineering*, pp. 2853–2866, ASCE. [25](#), [26](#), [27](#)
- Temam, R. (1969), Sur l'approximation des équations de Navier-Stokes par la méthode des pas fractionnaires (ii), *Arch. Rational Mechanics Anal.*, *26*, 367–380. [35](#), [205](#)
- Terzaghi, K. (1923), Die Berechnung der Durchlässigkeitsziffer des Tones aus dem Verlauf der hydrodynamischen Spannungserscheinungen, *Sitz. Akad. Wissen. Wien, Math. Naturwiss. Kl., Abt. IIa.*, *132*, 125–138. [22](#), [24](#)
- Terzaghi, K. (1936), The shearing resistance of saturated soils and the angles between the planes of shear, in *1st Int. Conf. Soil Mech.*, vol. 1, pp. 54–56. [105](#)
- Terzaghi, K., and R. B. Peck (1967), *Soil mechanics in engineering practice*, first ed., 173 – 182 pp., Wiley. [16](#), [24](#)
- Thiébot, J., and S. Guillou (2006), Simulation of processes acting on water-sediment mixtures in estuaries., in *Flow simulation in hydraulic engineering / Dresdner Wasserbaukolloquium*, edited by H.-B. Horlacher and K.-U. Graw, pp. 141–148. [104](#), [180](#)
- Thomas, D. N., S. J. Judd, and N. Fawcett (1999), Flocculation modelling : a review, *Water research*, *33*, 1579–1592. [20](#)
- Thomas, J. W. (1995), *Numerical Partial Differential Equations : Finite Difference Methods*, Springer, New York. [209](#)
- Thorn, M. F. C. (1981), Physical processes of siltation in tidal channels, in *Proceedings of Hydraulic Modelling applied to Maritime Engineering Problems*, pp. 47–55, ICE, London. [19](#)
- Toorman, E. A. (1996), Sedimentation and self-weight consolidation : general unifying theory, *Géotechnique*, *46*, 103–113. [24](#)
- Van Leussen, W. (1994), The kolmogorov microscale as limiting value for the floc sizes of suspended fine-grained sediments in estuaries, in *4th Nearshore and Estuarine Cohesive Sediment Transport Conference, Intercoh'94*, pp. 45–62. [27](#)
- Van Rijn, L. C. (1984), Sediment pickup functions, *J. Hydraul. Eng.*, *110*, 1494–1502. [29](#)
- Verney, R. (2006), Processus de contrôle de la dynamique des sédiments cohésifs, Ph.D. thesis, Université de Rouen. [13](#), [20](#)

- Vilaret, C., and A. G. Davies (1995), Modelling of sediment-turbulent flow interactions, *Applied Mechanics Review*, 48, 601–609. [27](#)
- Vilaret, C., C. Teisson, O. Simonin, and C. Boeuf (1996), Modélisation diphasique du transport de sédiments cohésifs, in *Actes des IV Journées Nationales Génie Côtier Génie Civil*, pp. 419–425. [25](#), [27](#)
- Wadell, H. (1933), Sphericity and roundness of rock particles, *Journal of Geology*, 41, 310–331. [53](#)
- Wallis, G. (1969), *One-dimensional Two-Phase Flow*, McGraw-Hill. [25](#), [98](#)
- Wells, M. R., and D. E. Stock (1983), The effects of crossing trajectories effects on the dispersion of particles in a turbulent flow, *J. Fluid Mech.*, 9, 421 – 435. [73](#), [115](#)
- Wen, C. Y., and Y. H. Yu (1966), Mechanics of fluidization, in *AiChe Symp. Ser.*, vol. 62, pp. 100–111. [52](#)
- Wentworth, C. K. (1922), A scale of grade and class terms for clastic sediments, *Journal of Geology*, 30, 377–392. [12](#)
- Willis, D. H., and B. G. Krishnappan (2005), Numerical modelling of cohesive sediment transport in rivers, *Canadian Journal of civil engineering*, 31, 749–758. [17](#)
- Winterwerp, J. C. (1998), A simple model for turbulence induced flocculation of cohesive sediment, *Journal of Hydraulic Research*, 36, 309–326. [20](#), [164](#), [189](#)

Table des figures

I.1	Schéma général de la dynamique sédimentaire (d'après Parker (1986) ; Mehta et al. (1989))	14
I.2	Schéma de principe des modèles hydrosédimentaires classiques	17
I.3	Grilles de calcul dans les plans physique (Oxz) et de transformation ($Ox^*\sigma$)	34
I.4	Description du problème (d'après Barbry (2000)).	36
I.5	Champ de vitesse de la phase fluide et de la phase solide. Isocontours de la fraction de volume de la phase solide à $t = 50s$ (d'après Barbry (2000)).	37
I.6	Champ de vitesse de la phase fluide et de la phase solide. Isocontours de la fraction de volume de la phase solide à $t = 50s$ (d'après Barbry (2000)).	37
II.1	Evolution du coefficient de traînée en fonction du nombre de Reynolds local à la particule (Re_p)	51
II.2	Evolution de l'exposant θ en fonction du nombre de Reynolds local à la particule (d'après Di Felice (1994))	52
II.3	Compilation de l'évolution du coefficient de traînée en fonction du nombre de Reynolds local pour des particules non sphériques - $\Psi = 1 ; 0,8$ et $0,6$	54
II.4	Classification des différentes approches pour la modélisation de la turbulence	58
II.5	Classification des régimes d'écoulement gaz-solide selon Elgobashi (1991)	59
III.1	Configuration expérimentale (a) et maillage de la zone d'étude (b).	86
III.2	Comparaison en plusieurs sections des résultats expérimentaux (+), des simulations avec le modèle PH (—) et des simulations avec le modèle PNH (- - -) - ($U_0 \approx 0.19$ m/s).	88
III.3	Comparaison des profils d'énergie cinétique turbulente simulés avec le modèle PH (—) et les résultats expérimentaux (x) en plusieurs sections - ($U_0 \approx 0.19$ m/s).	90
III.4	Comparaison en plusieurs sections des résultats expérimentaux (+), des simulations avec le modèle PH (—) et des simulations avec le modèle PNH (- - -) - ($U_0 \approx 0.24$ m/s).	91
III.5	Cliché - $U_0 \approx 0.24$ m/s.	92
III.6	Classification des écoulements sur un obstacle semi-circulaire (d'après Lowery and Liapis (1999)).	92

III.7	Comparaison en plusieurs sections des simulations avec le modèle PH (—) et des simulations avec le modèle PNH (- - -) – ($U_0 \approx 0.36$ m/s).	93
III.8	Champ de vitesse autour de la dune avec le modèle NH (a) et le modèle PNH (b) ; Champ de pression dynamique (modèle PNH) (c) – ($U_0 \approx 0.36$ m/s).	94
III.9	Evolution de la concentration dans une colonne de sédimentation.	97
III.10	Evolution de l'interface eau claire - suspension.	97
III.11	Isocontours de fraction volumique obtenus par la simulation numérique.	100
III.12	Comparaison des résultats numériques avec les mesures expérimentales pour l'évolution temporelle de la position des interfaces dans la colonne.	101
III.13	Conservation de la masse.	102
III.14	Evolution du paramètre d'amplification de la viscosité en fonction de α_s	102
III.15	Profils de fraction volumique (a) et de contrainte normale (b) à différents instants moyennés sur 16 profils échantillonnés toutes les 3 secondes. Comparaison avec les profils expérimentaux du LMSGC.	103
III.16	Granulométrie de l'échantillon de vase réelle utilisé pour l'expérience de sédimentation (<i>Thiébot and Guillou, 2006</i>).	104
III.17	Evolution temporelle de la position de l'interface eau claire-sédiment.	106
III.18	Profils de concentration (a) et de contrainte normale (b) à différents instants pour les particules de diamètre $20 \mu\text{m}$	107
III.19	Conservation de la masse.	108
III.20	Configuration expérimentale de <i>Muste et al. (2005)</i>	110
III.21	Profils de vitesse (a), de contrainte de Reynolds (b) et de contraintes normales horizontale (c) et verticale (d) en eau claire.	113
III.22	Comparaison des résultats du modèle diphasique avec 4 modélisations de la turbulence (T1, T2, T3 et T4) avec les mesures de <i>Muste et al. (2005)</i> et les profils analytiques de <i>Greimann et al. (1999)</i> et <i>Rouse (1937)</i> pour le cas NBS1. Figure supérieure : profils du défaut de vitesse entre les phases ($u_{lag} = u_f - u_s$). Figure inférieure : profils de fraction volumique solide.	114
III.23	Comparaison des résultats du modèle diphasique avec 4 modélisations de la turbulence (T1, T2, T3 et T4) avec les mesures de <i>Muste et al. (2005)</i> et les profils analytiques de <i>Greimann et al. (1999)</i> et <i>Rouse (1937)</i> pour le cas NS1. Figure supérieure : profils du défaut de vitesse entre les phases ($u_{lag} = u_f - u_s$). Figure inférieure : profils de fraction volumique solide.	116
III.24	Comparaison des résultats du modèle diphasique avec le modèle $k_f - \varepsilon_f$ (T2) avec les mesures de <i>Muste et al. (2005)</i> et les profils analytiques de <i>Greimann et al. (1999)</i> et <i>Rouse (1937)</i> pour le cas NS1 - Sensibilité au facteur de forme ψ . Figure supérieure : profils du défaut de vitesse entre les phases ($u_{lag} = u_f - u_s$). Figure inférieure : profils de fraction volumique solide.	119

III.25	Comparaison des profils d'énergie cinétique du fluide simulés par le modèle diphasique avec 4 modélisations de la turbulence (T1, T2, T3 et T4) pour le cas NBS1.	120
III.26	Comparaison des profils d'énergie cinétique du fluide simulés par le modèle diphasique avec 4 modélisations de la turbulence (T1, T2, T3 et T4) pour le cas NS1.	121
III.27	Rapport de différents temps caractéristiques pour le cas NBS1 (— τ_{fs}/τ_{fs}^t et - - - τ_{fs}/τ_s^c). Simulation avec le modèle $k_s - k_{fs}$ (T4).	122
III.28	Rapport de différents temps caractéristiques pour le cas NS1 (— τ_{fs}/τ_{fs}^t et - - - τ_{fs}/τ_s^c). Simulation avec le modèle $k_s - k_{fs}$ (T4).	122
III.29	Configuration expérimentale.	124
III.30	Profils du soliton après plusieurs tours dans le canal périodique.	128
III.31	Profils de surface libre et champ des vitesses à différents instants pour le cas d'un soliton se propageant dans le canal périodique.	129
III.32	Champ de vitesse à différents instants et évolution temporelle de la vitesse moyenne dans le canal.	130
III.33	Comparaison des profils de concentration numériques et expérimentaux à différents instants dans le canal hippodrome. La vitesse de dérive est modélisée par l'équation (Eq. III.16).	134
III.34	Profils d'énergie cinétique turbulente fluide à différents instants. Simulation réalisée avec le modèle $k_s - k_{fs}$ (T4).	134
III.35	Comparaison des résultats du modèle diphasique avec les mesures expérimentales (<i>Boutin, 1993</i>) sur les profils de concentration à différents instants. Simulations réalisées avec 3 diamètres de particule ($d = 5, 10$ et $20\mu m$) et les modèles de turbulence T1 (modèle $k_f - \varepsilon_f$ sans modèle de dispersion) et T2 (modèle $k_f - \varepsilon_f$ avec modèle de dispersion).	135
III.36	Rapport de différents temps caractéristiques dans le canal hippodrome obtenus par la simulation pour les 3 diamètres de particule et à $t = 1$ h 15 min (— τ_{fs}/τ_{fs}^t et - - - τ_{fs}/τ_s^c). Simulation réalisée avec le modèle de turbulence T2.	137
III.37	Schéma de synthèse.	139
IV.1	Schéma de fonctionnement d'un estuaire	142
IV.2	Carte de l'estuaire de la Seine (<i>Source : Port Autonome de Rouen, 1999</i>)	144
IV.3	Section schématique d'un estuaire	146
IV.4	Maillage de l'estuaire de la Seine	153
IV.5	Largeur de l'estuaire de la Seine	154
IV.6	Elévation de surface libre pour des marées de ME et de VE moyennes en différents points de sondage dans l'estuaire, comparaison avec les données du port Autonome de Rouen	156

IV.7	Vitesse moyenne du courant pour des marées de ME et de VE moyennes en différents points de sondage dans l'estuaire, comparaison avec les données du Port Autonome de Rouen	157
IV.8	Isocontour de concentration en marée de ME. Modèle diphasique : a) PM, b) PM+3, c) BM ; SAUM : d) PM, e) PM+3, f) BM.	159
IV.9	Isocontour de concentration en marée de VE. Modèle diphasique : a) PM, b) PM+3, c) BM ; SAUM : d) PM, e) PM+3, f) BM.	160
IV.10	Zoom près du fond en marée de VE : a) PM, b) BM.	161
D.1	Grilles de calcul dans les plans physique (Oxz) et de transformation ($Ox^*\sigma$)	205
D.2	Positionnement des points de calcul de la pression et de la vitesse	210
D.3	Organigramme du code de calcul	211
D.4	Organigramme de l'algorithme de résolution	212
D.5	Organigramme du modèle de turbulence pour la phase solide	213

Annexe A

Notations

A.1 Symboles romains

Notation	Définition	Unité
A	Aire caractéristique d'une particule	m^2
A_S	Aire de la surface de la particule sphérique équivalente	m^2
C	Concentration massique	$kg.m^{-3}$
\vec{c}	Vecteur vitesse instantanée d'une particule	$m.s^{-1}$
\vec{C}	Vecteur fluctuation de vitesse d'une particule	$m.s^{-1}$
$\langle \vec{c} \rangle_s = \vec{U}_s$	Vecteur vitesse moyenne d'une particule	$m.s^{-1}$
\vec{c}_r	Vecteur vitesse relative instantanée entre deux particules	$m.s^{-1}$
C_D	Coefficient de traînée	\emptyset
C_L	Coefficient de portance	\emptyset
C_β	Constante pour le calcul du temps caractéristique du mouvement turbulent de la phase fluide vu par les particules	\emptyset
D_A	Diamètre de la particule sphérique de surface équivalente	m
D_{AP}	Diamètre équivalent de la surface projetée de la particule	m
d_{flocs}	Diamètre des floes	m
d_k	Diamètre des particules de la classe k	m
d_{ip}	Distance interparticulaire	m
d_p	Diamètre d'une particule	m
D_S	Diamètre de la particule sphérique de volume équivalent	m
$\overline{\overline{D}}_k$	Tenseur des vitesses de déformation de la phase k	s^{-1}
$\overline{\overline{D}}_k^t$	Tenseur de dispersion pour la phase k	$m^2.s^{-1}$
$\overline{\overline{D}}_{fs}^t$	Tenseur de dispersion pour la vitesse de dérive	$m^2.s^{-1}$
e	Coefficient de restitution des collisions	\emptyset
e_{coll}	Efficacité des collisions	\emptyset
e_v	Indice des vides ($= \frac{\alpha_f}{\alpha_s}$)	\emptyset

\mathcal{F}_0	Constante d'érosion	$kg.m^{-2}.s^{-1}$
\mathcal{F}_D	Flux de dépôt	$kg.m^{-2}.s^{-1}$
\mathcal{F}_E	Flux d'érosion	$kg.m^{-2}.s^{-1}$
$\overrightarrow{F_D}$	Force de traînée	N
$\overrightarrow{F_L}$	Force de portance	N
\overrightarrow{f}	Force extérieure appliquée à une particule	N
f_L	Facteur de correction de la force de portance de Saffman	\emptyset
f^1	Fonction densité de probabilité de vitesse d'une particule	\emptyset
f^0	Distribution de Maxwell	\emptyset
f^2	Fonction de distribution des paires	\emptyset
\overrightarrow{g}	Vecteur accélération de la pesanteur	$m.s^{-2}$
G	Taux de cisaillement	s^{-1}
g_0	Fonction de distribution radiale	
H	Profondeur d'eau	m
$\overline{\overline{I}}$	Tenseur unité	\emptyset
k_p	Perméabilité	$m.s^{-1}$
k_B	Constante de Boltzmann	$J.K^{-1}$
K^t	Coefficient de dispersion turbulente pour les sédiments	$m^2.s^{-1}$
k_f	Energie cinétique turbulente de la phase fluide	$m^2.s^{-2}$
k_s	Energie cinétique turbulente de la phase solide	$m^2.s^{-2}$
k_{fs}	Covariance fluide-particule	$m^2.s^{-2}$
L	Echelle de longueur caractéristique de l'écoulement fluide	m
l_ε	Echelle de longueur pour la dissipation dans le modèle $k - \varepsilon$ à deux couches	m
l_μ	Echelle de longueur pour la viscosité turbulente dans le modèle $k - \varepsilon$ à deux couches	m
$\overrightarrow{M_k}$	Terme de transfert de quantité de mouvement entre les phases	$kg.m^{-2}.s^{-2}$
$\overrightarrow{M'_k}$	Force exercée sur la phase k par les autres phases	$kg.m^{-2}.s^{-2}$
\overrightarrow{n}	Vecteur normale unitaire orienté vers l'extérieur du domaine	\emptyset
n_k	Nombre de particules de la classe k	\emptyset
n_p	Densité volumique de particule	m^{-3}
p_k	Pression de la phase k	Pa
p_{ki}	Pression à l'interface de la phase k	Pa
p_s^{eff}	Pression effective de la phase solide	Pa
p_s^t	Pression turbulente de la phase solide	Pa
Re	Nombre de Reynolds	\emptyset
Re_p	Nombre de Reynolds local à la particule	\emptyset
Re_s	Nombre de Reynolds local à la particule basé sur la vitesse de cisaillement	\emptyset
Ri	Nombre de Richardson	\emptyset
$\overline{\overline{R_k}}$	Fonction d'autocorrélation de Lagrange	\emptyset

S'	Terme correctif dans le profil analytique de Greimann et al. (1999)	\emptyset
S_F	Sphéricité des particules	\emptyset
S_s	Flux verticale de la phase solide	$m.s^{-1}$
St	Nombre de Stokes	\emptyset
t	Temps	s
T	Température	K
T_s	Température granulaire	$m^2.s^{-2}$
$\overline{\overline{T}}_k$	Tenseur des contraintes de la phase k	$N.m^{-2}$
$\overline{\overline{T}}_k^{Re}$	Tenseur des contraintes turbulentes de la phase k	$N.m^{-2}$
$\vec{u}_k, u_{k,i}$	Vecteur , $i^{ème}$ composante du vecteur vitesse instantanée de la phase k	$m.s^{-1}$
$\vec{u}'_k, u'_{k,i}$	Vecteur , $i^{ème}$ composante du vecteur fluctuation de vitesse de la phase k	$m.s^{-1}$
$\vec{u}_r, u_{r,i}$	Vecteur , $i^{ème}$ composante du vecteur vitesse relative entre les phases	$m.s^{-1}$
$\vec{u}_d, u_{d,i}$	Vecteur , $i^{ème}$ composante du vecteur vitesse de dérive	$m.s^{-1}$
\vec{u}_i	Vecteur vitesse de l'interface	$m.s^{-1}$
U_{lag}	Différence de vitesse horizontale entre les phases fluide et solide	$m.s^{-1}$
u_*	Vitesse de frottement au fond	$m.s^{-1}$
V	Volume d'intégration	m^3
∂V	Surface frontière du volume d'intégration V	m^2
w_c	Vitesse de chute	$m.s^{-1}$
w_s	Vitesse verticale de la phase solide	$m.s^{-1}$
\vec{x}, x_i	Vecteur , $i^{ème}$ composante du vecteur position	m
X_{fs}	Rapport de masse locale fluide-solide	\emptyset
X_k	Fonction indicatrice de la phase k	\emptyset

A.2 Symboles grecs

Notation	Définition	Unité
α_k	Fraction volumique de la phase k	\emptyset
α_s^{max}	Fraction volumique maximum pour la phase solide	\emptyset
α_s^0	Fraction volumique de référence pour la phase solide	\emptyset
β	Facteur d'amplification des contraintes visqueuses	\emptyset
$\gamma_{i,j}$	Fréquence des collisions entre les particules de la classe i et de la classe j	s^{-1}
γ_c	Effet de trajectoires croisées pour le temps caractéristique de la turbulence de la phase fluide vue par les particules	\emptyset
δ_{ij}	Symbole de Kronecker	\emptyset

ε_k	Dissipation de l'énergie cinétique turbulente de la phase k	$m^2.s^{-3}$
ε_{fs}	Dissipation de la covariance fluide-particule	$m^2.s^{-3}$
ζ_s	Viscosité de volume	$m^2.s^{-1}$
η	Élévation de la surface libre	m
$\overline{\overline{\theta}}_s$	Tenseur des contraintes dues aux collisions pour la phase solide	$N.m^{-2}$
κ	Constante de Von Karman	\emptyset
$\overline{\overline{\Lambda}}_s$	Tenseur des corrélations des fluctuations de vitesse du second ordre pour la phase solide	$kg.m^{-2}.s^{-2}$
$\overline{\overline{\Lambda}}_{fs}$	Tenseur des corrélations des fluctuations de vitesse fluide-particule	$kg.m^{-2}.s^{-2}$
μ_k	Viscosité dynamique de la phase k	$kg.m^{-1}.s^{-1}$
ν_k	Viscosité cinématique de la phase k	$m^2.s^{-1}$
ν_k^t	Viscosité turbulente de la phase k	$m^2.s^{-1}$
ν_{fs}^t	Viscosité de la covariance fluide-particule	$m^2.s^{-1}$
ν_{mix}	Viscosité du mélange fluide-particule	$m^2.s^{-1}$
ν_s^c	Viscosité collisionnelle de la phase solide	$m^2.s^{-1}$
ξ	Rapport des temps caractéristiques de la turbulence de la phase fluide vu par les particules sur le temps de relaxation des particules	\emptyset
ρ_k	Masse volumique de la phase k	$kg.m^{-3}$
ρ	Masse volumique locale du milieu	$kg.m^{-3}$
ρ_{flocs}	Masse volumique des floes	$kg.m^{-3}$
σ_c	Nombre de Schmidt turbulent pour les particules	\emptyset
σ'	Contrainte effective	$N.m^{-2}$
σ	Profondeur adimensionnelle	\emptyset
σ_0	Profondeur adimensionnelle de référence pour les profils théoriques	\emptyset
$\overline{\overline{\Sigma}}_s$	Tenseur des contraintes effectives pour la phase solide	$N.m^{-2}$
$\overline{\overline{\tau}}_k$	Déviateur des contraintes de la phase k	$N.m^{-2}$
$\overline{\overline{\tau}}_{ki}$	Déviateur des contraintes à l'interface de la phase k	$N.m^{-2}$
$\overline{\overline{\tau}}_{mix}$	Déviateur des contraintes du mélange fluide-particule	$N.m^{-2}$
τ_b	Contrainte de frottement au fond	$N.m^{-2}$
τ_{ce}	Contrainte critique d'érosion	$N.m^{-2}$
τ_{cd}	Contrainte critique de dépôt	$N.m^{-2}$
τ_{fs}	Temps de relaxation des particules	s
τ_f^t	Temps caractéristique du mouvement turbulent de grande échelle de la phase fluide	s
τ_K	Echelle de temps de Kolmogorov	s
τ_{fs}^t	Temps caractéristique du mouvement turbulent de grande échelle de la phase fluide vue par les particules	s
τ_s^c	Temps caractéristique des collisions binaires entre particules	s
τ_{fb}	Temps caractéristique de l'écoulement basé sur la vitesse de frottement	s
$\overline{\overline{\tau}}_k^t$	Echelle de temps de Lagrange	s

Υ	Etat de surface des particules	\emptyset
Ψ	Facteur de forme des particules	\emptyset

Annexe B

Modèle de floculation basé sur le diamètre équivalent

[Winterwerp \(1998\)](#) a proposé un modèle de floculation incluant les effets d'agrégation et de rupture des flocs sous l'effet du cisaillement turbulent. Celui-ci considère un diamètre représentatif des flocs évoluant dans l'espace et le temps (Eq. B.1).

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{k'_A c}{n_f \rho_s} G D_p^{n_f-3} D^{4-n_f} - \frac{k'_B \mu_f^q}{n_f F_y} G^{q+1} D_p^{-p} D^{2q+1} \quad (\text{B.1})$$

Où D_p et D désignent le diamètre des particules élémentaires et le diamètre des flocs respectivement. n_f représente la dimension fractale des flocs, celle-ci traduit le fait que les flocs ont des formes irrégulières et par conséquent la relation entre le rayon et le volume n'est pas à la puissance trois mais à un exposant plus petit : la dimension fractale. Les flocs possèdent une surface externe plus importante qu'une sphère de même volume. F_y représente la résistance des flocs au cisaillement. $k'_A = \frac{3e_{coll}\pi e_{diff}}{2f_s}$ et $k'_B = ae_b$ sont des coefficients adimensionnels. Les paramètres e_{coll} , e_{diff} et e_b désignent des coefficients empiriques d'efficacité pour les collisions, la diffusion et la rupture des flocs respectivement. Les exposants p et q sont obtenus à partir de données expérimentales.

[Winterwerp \(1998\)](#) a calibré ce modèle sur des données expérimentales, les valeurs suivantes ont été obtenues :

- $D_p = 4\mu\text{m}$ et $\rho_s = 2650\text{kg.m}^{-3}$ pour les particules ;
- $k'_A = 0,15$ et $e_{coll} \approx 0,01$ et $e_{diff} \approx 0,5 - 1$ pour l'agrégation ;
- $k'_B \approx 10^{-5}$ pour $F_y \approx 10^{-10}\text{N}$

Annexe C

Intégration sur la largeur des équations du modèle diphasique

Soit un repère orthonormé (O, x_1, x_2, x_3) tel que, x_1 représente la direction horizontale dirigée d'aval en amont, x_2 la direction latérale à la section de l'estuaire et x_3 la verticale ascendante. Nous noterons (u_1^k, u_2^k, u_3^k) les composantes de la vitesse de la phase k, $B = y_2(x_1, x_3) - y_1(x_1, x_3)$ désigne la largeur, y_1 et y_2 sont deux valeurs de l'axe x_2 et $\bar{\phi}$ la moyenne sur la largeur d'une fonction ϕ intégrable et de classe C^2 : $\bar{\phi} = \frac{1}{B} \int_{y_1}^{y_2} \phi dx_2$.

Règle de Leibniz :

Si	\mathcal{D} est un opérateur différentiel et ϕ une fonction de classe C^1
Alors	$\int_{y_1}^{y_2} \mathcal{D}\phi dx_2 = \mathcal{D} \int_{y_1}^{y_2} \phi dx_2 + \phi(y_1)\mathcal{D}y_1 - \phi(y_2)\mathcal{D}y_2$

Nous imposons des conditions de non-glissement sur les parois latérales :

$$u_i(y_1) = u_i(y_2) = 0, \forall i \in (1, 2, 3)$$

Nous allons projeter les équations du modèle (Eq. I.16) et (Eq. I.17) sur les axes. Ainsi l'équation de conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_k \rho_k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha_k \rho_k u_i^k) = 0 \quad (\text{C.1})$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\left\{ \begin{array}{l} (Ox_1) : \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_k \rho_k u_1^k) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\alpha_k \rho_k u_1^k u_j^k) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\alpha_k (T_{1j}^{Re\ k} + T_{1j}^k) + M_1^k \\ (Ox_2) : \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_k \rho_k u_2^k) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\alpha_k \rho_k u_2^k u_j^k) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\alpha_k (T_{2j}^{Re\ k} + T_{2j}^k) + M_2^k \\ (Ox_3) : \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_k \rho_k u_3^k) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\alpha_k \rho_k u_3^k u_j^k) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\alpha_k (T_{3j}^{Re\ k} + T_{3j}^k) + M_3^k + \alpha_k \rho_k g \end{array} \right. \quad (C.2)$$

Nous allons maintenant détailler l'intégration des différents termes des équations (C.1) et (C.2).

C.1 Intégration de l'équation de conservation de la masse

- L'intégration du premier terme de l'équation (C.1) s'écrit :

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_k \rho_k) dx_2 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{y_1}^{y_2} \alpha_k \rho_k dx_2 + (\alpha_k \rho_k)|_{y_1} \frac{\partial y_1}{\partial t} - (\alpha_k \rho_k)|_{y_2} \frac{\partial y_2}{\partial t} \quad (C.3)$$

Or $\frac{\partial y_1}{\partial t} = \frac{\partial y_2}{\partial t} = 0$, donc l'équation (C.3) s'écrit :

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_k \rho_k) dx_2 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{y_1}^{y_2} \alpha_k \rho_k dx_2 = \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\alpha_k \rho_k} B) \quad (C.4)$$

- L'intégration du second terme de l'équation (C.1) s'écrit :

$$\begin{aligned} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha_k \rho_k u_i^k) dx_2 &= \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{y_1}^{y_2} \alpha_k \rho_k u_i^k dx_2 + (\alpha_k \rho_k u_i^k)|_{y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_i} \\ &\quad - (\alpha_k \rho_k u_i^k)|_{y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (C.5)$$

Or $u_i^k|_{y_1} = u_i^k|_{y_2} = 0$, donc l'équation (Eq. C.3) s'écrit :

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha_k \rho_k u_i^k) dx_2 = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{y_1}^{y_2} \alpha_k \rho_k u_i^k dx_2 = \frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{\alpha_k \rho_k u_i^k} B) \quad (C.6)$$

• L'équation de conservation de la masse intégrée sur la largeur peut donc s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\alpha_k \rho_k} B) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{\alpha_k \rho_k u_i^k} B) = 0 \quad (C.7)$$

C.2 Intégration de l'équation de conservation de la quantité de mouvement

Nous allons étudier le système formé par les trois équations (Eq. C.2). Dans un premier temps nous nous intéresserons au membre de droite.

- Intégration du premier terme :

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_k \rho_k u_i^k) dx_2 = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{y_1}^{y_2} \alpha_k \rho_k u_i^k dx_2 \right) + (\alpha_k \rho_k u_i^k)|_{y_1} \frac{\partial y_1}{\partial t} - (\alpha_k \rho_k u_i^k)|_{y_2} \frac{\partial y_2}{\partial t} \quad (C.8)$$

Or $\frac{\partial y_1}{\partial t} = \frac{\partial y_2}{\partial t} = 0$, donc l'équation (C.8) s'écrit :

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_k \rho_k u_i^k) dx_2 = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{y_1}^{y_2} \alpha_k \rho_k u_i^k dx_2 \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\overline{\alpha_k \rho_k u_i^k} B) \quad (C.9)$$

- Intégration du second terme :

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial}{\partial x_j} (\alpha_k \rho_k u_i^k u_j^k) dx_2 = \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{y_1}^{y_2} \alpha_k \rho_k u_i^k u_j^k dx_2 + (\alpha_k \rho_k u_i^k u_j^k)|_{y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_j} - (\alpha_k \rho_k u_i^k u_j^k)|_{y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_j} \quad (C.10)$$

Or $u_i^k|_{y_1} = u_i^k|_{y_2} = 0$, donc l'équation (Eq. C.10) s'écrit :

$$\begin{aligned} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial}{\partial x_j} (\alpha_k \rho_k u_i^k u_j^k) dx_2 &= \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{y_1}^{y_2} \alpha_k \rho_k u_i^k u_j^k dx_2 \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\alpha_k \rho_k u_i^k u_j^k} B) \end{aligned} \quad (C.11)$$

• Le membre de gauche de l'équation (Eq. C.2) intégrée sur la largeur peut donc s'écrire sous la forme :

$$\int_{y_1}^{y_2} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_k \rho_k u_i^k) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\alpha_k \rho_k u_i^k u_j^k) \right] dx_2 = \frac{\partial}{\partial t} (\overline{\alpha_k \rho_k u_i^k} B) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\alpha_k \rho_k u_i^k u_j^k} B) \quad (C.12)$$

Avec l'équation (C.7) et en considérant que la fraction volumique de la phase k est constante sur la largeur ($\overline{\alpha_k} = \alpha_k$), nous pouvons écrire l'équation (C.12) sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\overline{\alpha_k \rho_k u_i^k} B) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\alpha_k \rho_k u_i^k u_j^k} B) &= \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_k \rho_k \overline{u_i^k} B) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\alpha_k \rho_k \overline{u_i^k u_j^k} B) \\ &= \alpha_k \rho_k B \frac{\partial \overline{u_i^k}}{\partial t} + \alpha_k \rho_k \overline{u_j^k} B \frac{\partial \overline{u_i^k}}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (C.13)$$

Etudions maintenant l'intégration du membre de droite de l'équation (C.2).

On peut écrire ce terme sous la forme générale suivante :

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha_k p_k) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\alpha_k(\tau_{ij}^{Re\ k} + \tau_{ij}^k) + M_i^k - \alpha_k \rho_k g \delta_{i3}) \quad (C.14)$$

- Intégration du terme gravitaire :

$$\int_{y_1}^{y_2} \alpha_k \rho_k g dx_2 = \overline{\alpha_k \rho_k} g B \quad (C.15)$$

- Intégration du terme de pression :

Pour la phase fluide :

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha_f p_f) dx_2 = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{y_1}^{y_2} \alpha_f p_f dx_2 + (\alpha_f p_f)|_{y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_i} - (\alpha_f p_f)|_{y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_i} \quad (C.16)$$

Supposons les pressions latérales $\alpha_f p_f(y_1)$ et $\alpha_f p_f(y_2)$ soient égales à la valeur moyenne de la pression sur la largeur $\overline{\alpha_f p_f}$ le terme $(\alpha_f p_f)|_{y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_i} - (\alpha_f p_f)|_{y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_i}$ devient $(\overline{\alpha_f p_f})(\frac{\partial y_1}{\partial x_i} - \frac{\partial y_2}{\partial x_i}) = -(\overline{\alpha_f p_f}) \frac{\partial B}{\partial x_i}$ ainsi le terme de pression intégré sur la largeur s'écrit :

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha_f p_f) dx_2 = \frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{\alpha_f p_f} B) - (\overline{\alpha_f p_f}) \frac{\partial B}{\partial x_i} \quad (C.17)$$

En développant la dérivée du produit $\overline{\alpha_f p_f} B$ nous obtenons :

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha_f p_f) dx_2 = B \frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{\alpha_f p_f}) \quad (C.18)$$

Pour la phase solide, le terme de pression est donné par la relation (C.19).

$$\nabla(\alpha_s p_s) = \nabla(\alpha_s p_{s, coll}) + \nabla(\alpha_s p_f) \quad (C.19)$$

L'intégration du second terme est obtenu de manière similaire à celle décrite précédemment pour la pression du fluide. L'intégration du terme de pression collisionnelle donne :

$$\int_{y_1}^{y_2} G(\alpha_f) \frac{\partial \alpha_s}{\partial x_i} dx_2 = B \overline{G(\alpha_f)} \frac{\partial \alpha_s}{\partial x_i} \quad (C.20)$$

Donc le gradient de pression pour la phase solide intégré sur la largeur s'écrit :

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha_s p_s) dx_2 = B \overline{G(\alpha_f)} \frac{\partial \alpha_s}{\partial x_i} + B \frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{\alpha_s p_f}) \quad (C.21)$$

- Intégration du terme de contrainte : le tenseur des contraintes visqueuses, $\alpha_k \overline{\tau}_k$ est

modélisé de la manière suivantes :

$$\alpha_k(\overline{\tau}_k^{Re} + \overline{\tau}_k^f) = \alpha_k(\mathcal{A}_k^k \frac{\partial u_j^k}{\partial x_j} + \mu_t^k \frac{\partial u_3^k}{\partial x_3}) + \alpha_{k'}(\mathcal{A}_k^{k'} \frac{\partial u_j^{k'}}{\partial x_j} + \mu_t^{k'} \frac{\partial u_3^{k'}}{\partial x_3}) \quad (C.22)$$

Où $j \in [1, 2]$, \mathcal{A}_k^k la viscosité turbulente horizontale, μ_t^k la viscosité turbulente verticale pour la phase k et k' désigne l'autre phase.

A partir des équations (I.17) et (C.22), nous allons intégrer le terme de contrainte. En considérant les différences d'échelle entre l'horizontale et la verticale (écoulement en zone peu profonde), nous prenons en compte les expressions des contraintes suivantes :

$$\begin{cases} T_{ij}^{Re_k} + T_{ij}^{f_k} = \mathcal{A}_k^k \frac{\partial u_i^k}{\partial x_j} \\ T_{i3}^{Re_k} + T_{i3}^{f_k} = \mu_t^k \frac{\partial u_i^k}{\partial x_3} \end{cases} \quad (C.23)$$

Nous allons traiter en détail des termes $\frac{\partial}{\partial x_j}(\alpha_k \mathcal{A}_k^k \frac{\partial u_i^k}{\partial x_j})$ et $\frac{\partial}{\partial x_3}(\alpha_k \mu_t^k \frac{\partial u_i^k}{\partial x_3})$, où $j \in [1, 2]$. Les contraintes au niveau des parois latérales sont supposées symétrique, d'où $(\mathcal{A}_k^k \frac{\partial u_i^k}{\partial x_j})|_{y_1} = (\mathcal{A}_k^k \frac{\partial u_i^k}{\partial x_j})|_{y_2} = (\mathcal{A}_k^k \frac{\partial u_i^k}{\partial x_j})|_m$ et $(\mu_t^k \frac{\partial u_i^k}{\partial x_3})|_{y_1} = (\mu_t^k \frac{\partial u_i^k}{\partial x_3})|_{y_2} = (\mu_t^k \frac{\partial u_i^k}{\partial x_3})|_m$.

Cas $j = 1$:

$$\begin{aligned} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial}{\partial x_1}(\alpha_k \mathcal{A}_k^k \frac{\partial u_i^k}{\partial x_1}) dx_2 &= \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{y_1}^{y_2} (\alpha_k \mathcal{A}_k^k \frac{\partial u_i^k}{\partial x_1}) dx_2 + (\alpha_k \mathcal{A}_k^k \frac{\partial u_i^k}{\partial x_1})|_{y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} - (\alpha_k \mathcal{A}_k^k \frac{\partial u_i^k}{\partial x_1})|_{y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1}(\alpha_k \mathcal{A}_k^k \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial u_i^k}{\partial x_1} dx_2) - (\alpha_k \mathcal{A}_k^k \frac{\partial u_i^k}{\partial x_1})|_m \frac{\partial y_2 - y_1}{\partial x_1} \\ \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial}{\partial x_1}(\alpha_k \mathcal{A}_k^k \frac{\partial u_i^k}{\partial x_1}) dx_2 &= \frac{\partial}{\partial x_1}(\alpha_k \mathcal{A}_k^k \frac{\partial \overline{B u_i^k}}{\partial x_1}) - (\alpha_k \mathcal{A}_k^k \frac{\partial u_i^k}{\partial x_1})|_m \frac{\partial B}{\partial x_1} \end{aligned} \quad (C.24)$$

Cas $j = 2$:

La contrainte intégrée sur la largeur exercée sur le fluide par les parois latérales est donnée par la formule suivante :

$$\tau = \frac{g \rho_f}{C h^2} u_1^k |u_1^k| \quad (C.25)$$

En notant χ la coordonnée curviligne des berges, nous obtenons l'expression :

$$\begin{aligned} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial}{\partial x_2} (\alpha_k \mathcal{A}_L^k \frac{\partial u_i^k}{\partial x_2}) dx_2 &= (\alpha_k \mathcal{A}_L^k \frac{\partial u_i^k}{\partial x_2})|_{y_2} - (\alpha_k \mathcal{A}_L^k \frac{\partial u_i^k}{\partial x_2})|_{y_1} \\ \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial}{\partial x_2} (\alpha_k \mathcal{A}_L^k \frac{\partial u_i^k}{\partial x_2}) dx_2 &= -\alpha_k \frac{\mathcal{A}_L^k}{\mathcal{A}_L} \frac{g\rho_k}{Ch^2} u_1^k |u_1^k| (|\frac{\partial \chi}{\partial x_i}|_{Y_1} + |\frac{\partial \chi}{\partial x_i}|_{Y_2}) \end{aligned} \quad (C.26)$$

Nous définissons également une contrainte due aux collisions entre les particules solides et la paroi (τ_{coll}), telle que :

$$\begin{aligned} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial}{\partial x_2} (\alpha_k \mathcal{A}_L^k \frac{\partial u_i^k}{\partial x_2}) dx_2 &= (\alpha_k \mathcal{A}_L^k \frac{\partial u_i^k}{\partial x_2})|_{y_2} - (\alpha_k \mathcal{A}_L^k \frac{\partial u_i^k}{\partial x_2})|_{y_1} \\ &= \alpha_k \frac{\mathcal{A}_L^k}{\mathcal{A}_L} \tau_{coll_{i2}} \end{aligned} \quad (C.27)$$

D'une même manière analogue au cas $\alpha = 1$,

$$\begin{aligned} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial}{\partial x_3} (\alpha_k \mu_t^k \frac{\partial u_i^k}{\partial x_3}) dx_2 &= \frac{\partial}{\partial x_3} \int_{y_1}^{y_2} (\alpha_k \mu_t^k \frac{\partial u_i^k}{\partial x_3}) dx_2 + ((\alpha_k \mu_t^k \frac{\partial u_i^k}{\partial x_3})|_{y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_3} - (\alpha_k \mu_t^k \frac{\partial u_i^k}{\partial x_3})|_{y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_3}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_3} (\alpha_k \mu_t^k \frac{\partial B \bar{u}_i^k}{\partial x_3}) - ((\alpha_k \mu_t^k \frac{\partial u_i^k}{\partial x_3})|_m \frac{\partial B}{\partial x_3}) \end{aligned} \quad (C.28)$$

L'intégration du terme $\frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\alpha_{k'} \mathcal{A}_L^k \frac{\partial u_i^{k'}}{\partial x_\alpha}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\mu_t^k \frac{\partial u_i^{k'}}{\partial x_3})$ est rigoureusement identique à celle présenté ci-dessus aux coefficients \mathcal{A}_L^k et μ_t^k près.

Précisons ici l'expression des coefficients \mathcal{A}_L^k et μ_t^k :

$$\begin{cases} \mathcal{A}_L^f = \mathcal{A}_L & \mu_t^f = \mu_t \\ \mathcal{A}_L^s = \mathcal{A}_L \alpha_s \beta & \mu_t^s = \mu_t \alpha_s \beta \end{cases} \quad (C.29)$$

Finalement, le terme de contrainte sur (O x_i) intégré sur la largeur s'écrit :

▷ Pour la phase fluide :

$$\begin{aligned} \int_{y_1}^{y_2} [\frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\alpha_f \mathcal{A}_L^f \frac{\partial u_i^f}{\partial x_\alpha}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\alpha_f \mu_t^f \frac{\partial u_i^f}{\partial x_3}) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\alpha_s \mathcal{A}_L^s \frac{\partial u_i^s}{\partial x_\alpha}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\mu_t^s \frac{\partial u_i^s}{\partial x_3})] dx_2 \\ = \frac{\partial}{\partial x_1} (\alpha_f \mathcal{A}_L \frac{\partial B \bar{u}_i^f}{\partial x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\alpha_f \mu_t \frac{\partial B \bar{u}_i^f}{\partial x_3}) + \frac{\partial}{\partial x_1} (\alpha_s \mathcal{A}_L \frac{\partial B \bar{u}_i^s}{\partial x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\alpha_s \mu_t \frac{\partial B \bar{u}_i^s}{\partial x_3}) \\ - (\alpha_f \mathcal{A}_L \frac{\partial u_i^f}{\partial x_1})|_m \frac{\partial B}{\partial x_1} - (\alpha_f \mu_t \frac{\partial u_i^f}{\partial x_3})|_m \frac{\partial B}{\partial x_3} \\ + \alpha_s \tau_{coll_{i2}} - \alpha_f \frac{g\rho_f}{Ch^2} u_1^f |u_1^f| (|\frac{\partial \chi}{\partial x_i}|_{Y_1} + |\frac{\partial \chi}{\partial x_i}|_{Y_2}) \end{aligned} \quad (C.30)$$

▷ Pour la phase solide :

$$\begin{aligned}
 & \int_{y_1}^{y_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\alpha_s \mathcal{A}_s^s \frac{\partial u_i^s}{\partial x_\alpha}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\alpha_s \mu_t^s \frac{\partial u_i^s}{\partial x_3}) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\alpha_f \mathcal{A}_f^f \frac{\partial u_i^f}{\partial x_\alpha}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\mu_t^f \frac{\partial u_i^f}{\partial x_3}) \right] dx_2 \\
 &= \frac{\partial}{\partial x_1} (\alpha_s^2 \mathcal{A}_s \beta \frac{\partial B \overline{u_i^s}}{\partial x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\alpha_s^2 \mu_t \beta \frac{\partial B \overline{u_i^s}}{\partial x_3}) + \frac{\partial}{\partial x_1} (\alpha_f \mathcal{A}_f \alpha_s \beta \frac{\partial B \overline{u_i^f}}{\partial x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\alpha_f \mu_t \alpha_s \beta \frac{\partial B \overline{u_i^f}}{\partial x_3}) \\
 &- (\alpha_s^2 \beta \mathcal{A}_s \frac{\partial u_i^s}{\partial x_1})|_m \frac{\partial B}{\partial x_1} - ((\alpha_s^2 \beta \mu_t \frac{\partial u_i^s}{\partial x_3})|_m \frac{\partial B}{\partial x_3} \\
 &+ \overline{\alpha_s^2 \beta} \tau_{coll_{i2}} - \alpha_s \alpha_f \beta \frac{g \rho_f}{C h^2} u_1^f |u_1^f| (|\frac{\partial \chi}{\partial x_i}|_{Y_1} + |\frac{\partial \chi}{\partial x_i}|_{Y_2})
 \end{aligned} \tag{C.31}$$

• Intégration de la source de quantité de mouvement interfaciale \mathbf{M}^k :

$$M_i^k = p_{ki} \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_i} - \tau_{ij}^{ki} \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_j} + M_i'^k \tag{C.32}$$

▷ Pour l'intégration du terme $p_{ki} \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_i}$, nous particularisons ce terme en fonction de la phase :

Pour le fluide : $p_{fi} = p_f - \frac{1}{4} \rho_f |\mathbf{u}^f - \mathbf{u}^s|^2$

$$\int_{y_1}^{y_2} [(p_f - \frac{1}{4} \rho_f |\mathbf{u}^f - \mathbf{u}^s|^2) \frac{\partial \alpha_f}{\partial x_i}] dx_2 = (\bar{p}_f - \frac{1}{4} \rho_f \overline{|\mathbf{u}^f - \mathbf{u}^s|^2}) B \frac{\partial \alpha_f}{\partial x_i} \tag{C.33}$$

Pour le solide : $p_{si} = p_f - \frac{1}{4} \rho_f |\mathbf{u}^f - \mathbf{u}^s|^2 + \frac{4}{d} \sigma_p$

$$\int_{y_1}^{y_2} [(p_f - \frac{1}{4} \rho_f |\mathbf{u}^f - \mathbf{u}^s|^2 + \frac{4}{d} \sigma_p) \frac{\partial \alpha_s}{\partial x_i}] dx_2 = (\bar{p}_f - \frac{1}{4} \rho_f \overline{|\mathbf{u}^f - \mathbf{u}^s|^2} + \frac{4}{d} \bar{\sigma}_p) B \frac{\partial \alpha_s}{\partial x_i} \tag{C.34}$$

▷ Intégration du terme $\tau_{ij}^{ki} \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_j}$:

Tout d'abord développons ce terme en conservant la forme utilisée pour les contraintes visqueuses :

$$\tau_{ij}^{ki} \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_j} = \beta [\mathcal{A}_s \frac{\partial u_i^k}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_\alpha} + \mu_t \frac{\partial u_i^k}{\partial x_3} \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_3}] \tag{C.35}$$

$$\int_{y_1}^{y_2} [\beta (\mathcal{A}_s \frac{\partial u_i^k}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_\alpha} + \mu_t \frac{\partial u_i^k}{\partial x_3} \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_3})] dx_2 = \beta B [\bar{\mathcal{A}}_s \frac{\partial \overline{u_i^k}}{\partial x_1} \frac{\partial \overline{\alpha_k}}{\partial x_1} + \bar{\mu}_t \frac{\partial \overline{u_i^k}}{\partial x_3} \frac{\partial \overline{\alpha_k}}{\partial x_3}] \tag{C.36}$$

▷ Intégration du terme $M_i'^k$:

D'après l'équation (I.28), $M_i'^s = C_{FD}(u_i^f - u_i^s)$ et $M_i'^s = -C_{FD}(u_i^f - u_i^s)$.

Donc :

$$\int_{y_1}^{y_2} M_i'^k dx_2 = \int_{y_1}^{y_2} [C_{FD}(u_i^f - u_i^s)] dx_2 = B \overline{C_{FD}} (\overline{u_i^f} - \overline{u_i^s}) \quad (\text{C.37})$$

Le terme de source de quantité de mouvement intégré sur la largeur s'écrit :

Pour la phase fluide :

$$\begin{aligned} \int_{y_1}^{y_2} M_i^f dx_2 = & (\bar{p}_f - \frac{1}{4} \rho_f |\overline{\mathbf{u}^f} - \overline{\mathbf{u}^s}|^2) B \frac{\partial \alpha_f}{\partial x_i} + \beta B [\bar{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}} \frac{\partial \overline{u_i^f}}{\partial x_1} \frac{\partial \alpha_f}{\partial x_1} + \bar{\mu}_t \frac{\partial \overline{u_i^f}}{\partial x_3} \frac{\partial \alpha_f}{\partial x_3}] \\ & - B \overline{C_{FD}} (\overline{u_i^f} - \overline{u_i^s}) \end{aligned} \quad (\text{C.38})$$

Pour la phase solide :

$$\begin{aligned} \int_{y_1}^{y_2} M_i^s dx_2 = & (\bar{p}_f - \frac{1}{4} \rho_f |\overline{\mathbf{u}^f} - \overline{\mathbf{u}^s}|^2 + \frac{4}{d} \bar{\sigma}_p) B \frac{\partial \alpha_s}{\partial x_i} + \beta B [\bar{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}} \frac{\partial \overline{u_i^s}}{\partial x_1} \frac{\partial \alpha_s}{\partial x_1} + \bar{\mu}_t \frac{\partial \overline{u_i^s}}{\partial x_3} \frac{\partial \alpha_s}{\partial x_3}] \\ & + B \overline{C_{FD}} (\overline{u_i^f} - \overline{u_i^s}) \end{aligned} \quad (\text{C.39})$$

Finalement, nous pouvons écrire l'équation de conservation de la quantité de mouvement intégrée sur la largeur pour la phase fluide :

$$\begin{aligned} \overline{\alpha_f \rho_f} B \frac{\partial \overline{u_i^f}}{\partial t} + \overline{\alpha_f \rho_f u_j^f} B \frac{\partial \overline{u_i^f}}{\partial x_j} = & -B \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{\alpha_f p_f}) + \frac{\partial}{\partial x_1} (\alpha_f \mathcal{A}_{\mathcal{L}} \frac{\partial B \overline{u_i^f}}{\partial x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\alpha_f \mu_t \frac{\partial B \overline{u_i^f}}{\partial x_3}) \\ & + \frac{\partial}{\partial x_1} (\alpha_s \mathcal{A}_{\mathcal{L}} \frac{\partial B \overline{u_i^s}}{\partial x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\alpha_s \mu_t \frac{\partial B \overline{u_i^s}}{\partial x_3}) \\ & - (\alpha_f \mathcal{A}_{\mathcal{L}} \frac{\partial u_i^f}{\partial x_1})|_m \frac{\partial B}{\partial x_1} - (\alpha_f \mu_t \frac{\partial u_i^f}{\partial x_3})|_m \frac{\partial B}{\partial x_3} \\ & + \alpha_s \tau_{coll_{i2}} - \alpha_f \frac{g \rho_f}{C h^2} u_1^f |u_1^f| (|\frac{\partial \chi}{\partial x_i}|_{Y_1} + |\frac{\partial \chi}{\partial x_i}|_{Y_2}) \\ & + (\bar{p}_f - \frac{1}{4} \rho_f |\overline{\mathbf{u}^f} - \overline{\mathbf{u}^s}|^2) B \frac{\partial \alpha_f}{\partial x_i} \\ & + \beta B [\bar{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}} \frac{\partial \overline{u_i^f}}{\partial x_1} \frac{\partial \alpha_f}{\partial x_1} + \bar{\mu}_t \frac{\partial \overline{u_i^f}}{\partial x_3} \frac{\partial \alpha_f}{\partial x_3}] - B \overline{C_{FD}} (\overline{u_i^f} - \overline{u_i^s}) \\ & - \overline{\alpha_f \rho_f} g B \delta_{i3} \end{aligned} \quad (\text{C.40})$$

En recombinaut les termes de pression, cette équation s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}
\overline{\alpha_f \rho_f} B \frac{\partial \overline{u_i^f}}{\partial t} + \overline{\alpha_f \rho_f u_j^f} B \frac{\partial \overline{u_i^f}}{\partial x_j} = & -\overline{\alpha_f} B \frac{\partial \overline{p_f}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_1} (\alpha_f \mathcal{A}_{\mathcal{L}} \frac{\partial \overline{B u_i^f}}{\partial x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\alpha_f \mu_t \frac{\partial \overline{B u_i^f}}{\partial x_3}) \\
& + \frac{\partial}{\partial x_1} (\alpha_s \mathcal{A}_{\mathcal{L}} \frac{\partial \overline{B u_i^s}}{\partial x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\alpha_s \mu_t \frac{\partial \overline{B u_i^s}}{\partial x_3}) \\
& - (\alpha_f \mathcal{A}_{\mathcal{L}} \frac{\partial u_i^f}{\partial x_1})|_m \frac{\partial B}{\partial x_1} - (\alpha_f \mu_t \frac{\partial u_i^f}{\partial x_3})|_m \frac{\partial B}{\partial x_3} \\
& + \alpha_s \tau_{coll_{i2}} - \alpha_f \frac{g \rho_f}{C h^2} u_1^f |u_1^f| (|\frac{\partial \chi}{\partial x_i}|_{Y_1} + |\frac{\partial \chi}{\partial x_i}|_{Y_2}) \\
& - \frac{1}{4} \rho_f |\mathbf{u}^f - \mathbf{u}^s|^2 B \frac{\partial \alpha_f}{\partial x_i} \\
& + \beta B [\bar{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}} \frac{\partial \overline{u_i^f}}{\partial x_1} \frac{\partial \alpha_f}{\partial x_1} + \bar{\mu}_t \frac{\partial \overline{u_i^f}}{\partial x_3} \frac{\partial \alpha_f}{\partial x_3}] - B \overline{C_{FD}} (\overline{u_i^f} - \overline{u_i^s}) \\
& - \overline{\alpha_f \rho_f} g B \delta_{i3}
\end{aligned} \tag{C.41}$$

En divisant cette dernière équation par $\overline{\alpha_f \rho_f} B$, nous obtenons la forme définitive :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \overline{u_i^f}}{\partial t} + \overline{u_j^f} \frac{\partial \overline{u_i^f}}{\partial x_j} = & -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial \overline{p_f}}{\partial x_i} + \frac{1}{\alpha_f \rho_f B} \frac{\partial}{\partial x_1} (\alpha_f \mathcal{A}_{\mathcal{L}} \frac{\partial B \overline{u_i^f}}{\partial x_1}) + \frac{1}{\alpha_f \rho_f B} \frac{\partial}{\partial x_3} (\alpha_f \mu_t \frac{\partial B \overline{u_i^f}}{\partial x_3}) \\
 & + \frac{1}{\alpha_f \rho_f B} \frac{\partial}{\partial x_1} (\alpha_s \mathcal{A}_{\mathcal{L}} \frac{\partial B \overline{u_i^s}}{\partial x_1}) + \frac{1}{\alpha_f \rho_f B} \frac{\partial}{\partial x_3} (\alpha_s \mu_t \frac{\partial B \overline{u_i^s}}{\partial x_3}) \\
 & - (\frac{1}{\rho_f B} \mathcal{A}_{\mathcal{L}} \frac{\partial u_i^f}{\partial x_1})|_m \frac{\partial B}{\partial x_1} - (\frac{1}{\rho_f B} \mu_t \frac{\partial u_i^f}{\partial x_3})|_m \frac{\partial B}{\partial x_3} \\
 & + \frac{1}{\alpha_f \rho_f B} \alpha_s \tau_{coll_{i2}} - \frac{1}{B} \frac{g}{Ch^2} u_1^f |u_1^f| (|\frac{\partial \chi}{\partial x_i}|_{Y_1} + |\frac{\partial \chi}{\partial x_i}|_{Y_2}) \\
 & - (\frac{1}{\alpha_f} \frac{1}{4} |\mathbf{u}^f - \mathbf{u}^s|^2 \frac{\partial \alpha_f}{\partial x_i}) \\
 & + \frac{1}{\alpha_f \rho_f} \beta [\mathcal{A}_{\mathcal{L}} \frac{\partial u_i^f}{\partial x_1} \frac{\partial \alpha_f}{\partial x_1} + \bar{\mu}_t \frac{\partial u_i^f}{\partial x_3} \frac{\partial \alpha_f}{\partial x_3}] - \frac{\overline{C_{FD}}}{\alpha_f \rho_f} (\overline{u_i^f} - \overline{u_i^s}) \\
 & - g \delta_{i3}
 \end{aligned} \tag{C.42}$$

En posant : $A_L = \frac{\mathcal{A}_{\mathcal{L}}}{\rho_k}$ et $\nu_t = \frac{\mu_t}{\rho_k}$, l'équation (C.42) devient :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \overline{u_i^f}}{\partial t} + \overline{u_j^f} \frac{\partial \overline{u_i^f}}{\partial x_j} = & -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial \overline{p_f}}{\partial x_i} + \frac{1}{\alpha_f B} \frac{\partial}{\partial x_1} (\alpha_f A_L \frac{\partial B \overline{u_i^f}}{\partial x_1}) + \frac{1}{\alpha_f B} \frac{\partial}{\partial x_3} (\alpha_f \nu_t \frac{\partial B \overline{u_i^f}}{\partial x_3}) \\
 & + \frac{1}{\alpha_f B} \frac{\partial}{\partial x_1} (\alpha_s A_L \frac{\partial B \overline{u_i^s}}{\partial x_1}) + \frac{1}{\alpha_f B} \frac{\partial}{\partial x_3} (\alpha_s \nu_t \frac{\partial B \overline{u_i^s}}{\partial x_3}) \\
 & - (\frac{1}{B} A_L \frac{\partial u_i^f}{\partial x_1})|_m \frac{\partial B}{\partial x_1} - (\frac{1}{B} \nu_t \frac{\partial u_i^f}{\partial x_3})|_m \frac{\partial B}{\partial x_3} \\
 & + \frac{1}{\alpha_f \rho_f B} \alpha_s \tau_{coll_{i2}} - \frac{1}{B} \frac{g}{Ch^2} u_1^f |u_1^f| (|\frac{\partial \chi}{\partial x_i}|_{Y_1} + |\frac{\partial \chi}{\partial x_i}|_{Y_2}) \\
 & - \frac{1}{\alpha_f} \frac{1}{4} |\mathbf{u}^f - \mathbf{u}^s|^2 \frac{\partial \alpha_f}{\partial x_i} \\
 & + \frac{1}{\alpha_f} \beta [\bar{A}_L \frac{\partial u_i^f}{\partial x_1} \frac{\partial \alpha_f}{\partial x_1} + \bar{\nu}_t \frac{\partial u_i^f}{\partial x_3} \frac{\partial \alpha_f}{\partial x_3}] - \frac{\overline{C_{FD}}}{\alpha_f \rho_f} (\overline{u_i^f} - \overline{u_i^s}) \\
 & - g \delta_{i3}
 \end{aligned} \tag{C.43}$$

De même pour la phase solide :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \bar{u}_i^s}{\partial t} + \bar{u}_j^s \frac{\partial \bar{u}_i^s}{\partial x_j} = & -\frac{1}{\rho_s} \frac{\partial \bar{p}_s}{\partial x_i} - \frac{G(\alpha_f)}{\alpha_s \rho_s} \frac{\partial \alpha_s}{\partial x_i} + \frac{1}{\alpha_s B} \frac{\partial}{\partial x_1} (\alpha_s^2 \beta A_L \frac{\partial \bar{B} \bar{u}_i^s}{\partial x_1}) + \frac{1}{\alpha_s B} \frac{\partial}{\partial x_3} (\alpha_s^2 \beta \nu_t \frac{\partial \bar{B} \bar{u}_i^s}{\partial x_3}) \\
 & + \frac{1}{\alpha_s B} \frac{\partial}{\partial x_1} (\alpha_f \alpha_s \beta A_L \frac{\partial \bar{B} \bar{u}_i^f}{\partial x_1}) + \frac{1}{\alpha_s B} \frac{\partial}{\partial x_3} (\alpha_f \alpha_s \beta \nu_t \frac{\partial \bar{B} \bar{u}_i^f}{\partial x_3}) \\
 & - (\frac{1}{B} \alpha_s \beta A_L \frac{\partial u_i^s}{\partial x_1})|_m \frac{\partial B}{\partial x_1} - (\frac{1}{B} \alpha_s \beta \nu_t \frac{\partial u_i^s}{\partial x_3})|_m \frac{\partial B}{\partial x_3} \\
 & + \frac{1}{\alpha_s^2 \beta \rho_s B} \alpha_s \tau_{coll_{i2}} - \frac{1}{B} \alpha_s \beta \frac{g}{Ch^2} u_1^s |u_1^s| (|\frac{\partial \chi}{\partial x_i}|_{Y_1} + |\frac{\partial \chi}{\partial x_i}|_{Y_2}) \\
 & + (\frac{4\sigma_p}{\alpha_s \rho_s d} - \frac{\rho_f}{4\alpha_s \rho_s} |\mathbf{u}^f - \mathbf{u}^s|^2) \frac{\partial \alpha_s}{\partial x_i} \\
 & + \frac{1}{\alpha_s} \beta [\bar{A}_L \frac{\partial \bar{u}_i^s}{\partial x_1} \frac{\partial \alpha_s}{\partial x_1} + \bar{\nu}_t \frac{\partial \bar{u}_i^s}{\partial x_3} \frac{\partial \alpha_s}{\partial x_3}] - \frac{\bar{C}_{FD}}{\alpha_s \rho_s} (\bar{u}_i^f - \bar{u}_i^s) \\
 & - g \delta_{i3}
 \end{aligned} \tag{C.44}$$

C.2.1 Etablissement de la condition de surface libre

L'intégration de la condition cinématique de surface libre ne présente pas de difficultés :

$$\begin{aligned}
 \int_{y_1}^{y_2} [\frac{\partial \eta}{\partial t} + u_1^\eta \frac{\partial \eta}{\partial x_1}] dx_2 &= \int_{y_1}^{y_2} u_3^\eta dx_2 \\
 \frac{\partial \eta}{\partial t} \int_{y_1}^{y_2} dx_2 + \frac{\partial \eta}{\partial x_1} \int_{y_1}^{y_2} u_1^\eta dx_2 &= B \bar{u}_3^\eta \\
 B \frac{\partial \eta}{\partial t} + B \bar{u}_1^\eta \frac{\partial \eta}{\partial x_1} &= B \bar{u}_3^\eta
 \end{aligned} \tag{C.45}$$

Pour l'équation (C.7) intégrée sur la verticale, nous obtenons :

$$\int_{-h}^{\eta} [\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_k \rho_k B) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\alpha_k \rho_k u_i^k B)] dx_3 = 0 \tag{C.46}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_k \rho_k B) \, dx_3 &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\eta} (\alpha_k \rho_k B) \, dx_3 + (\alpha_k \rho_k B)|_{-h} \frac{\partial(-h)}{\partial t} - (\alpha_k \rho_k B)|_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\eta} (\alpha_k \rho_k B) \, dx_3 - (\alpha_k \rho_k B)|_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} \\
\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial}{\partial x_1} (\alpha_k \rho_k u_1^k B) \, dx_3 &= \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-h}^{\eta} (\alpha_k \rho_k u_1^k B) \, dx_3 + (\alpha_k \rho_k u_1^k B)|_{-h} \frac{\partial(-h)}{\partial x_1} - (\alpha_k \rho_k u_1^k B)|_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} \\
&= \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-h}^{\eta} (\alpha_k \rho_k u_1^k B) \, dx_3 - (\alpha_k \rho_k u_1^k B)|_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} \\
\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial}{\partial x_3} (\alpha_k \rho_k u_3^k B) \, dx_3 &= (\alpha_k \rho_k u_3^k B)|_{\eta} - (\alpha_k \rho_k u_3^k B)|_{-h} \\
&= (\alpha_k \rho_k u_3^k B)|_{\eta}
\end{aligned} \tag{C.47}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\eta} (\alpha_k \rho_k B) \, dx_3 - (\alpha_k \rho_k B)|_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-h}^{\eta} (\alpha_k \rho_k u_1^k B) \, dx_3 \\
&- (\alpha_k \rho_k u_1^k B)|_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} + (\alpha_k \rho_k u_3^k B)|_{\eta} = 0
\end{aligned} \tag{C.48}$$

En divisant par ρ_k et en sommant sur les deux phases, on obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\eta} ((\alpha_f + \alpha_s)B) dx_3 - ((\alpha_f + \alpha_s)B)|_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-h}^{\eta} ((\alpha_f u_1^f + \alpha_s u_1^s)B) dx_3 \\
 & - ((\alpha_f u_1^f + \alpha_s u_1^s)B)|_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} + ((\alpha_f u_3^f + \alpha_s u_3^s)B)|_{\eta} = 0 \\
 & \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\eta} B dx_3 - B|_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-h}^{\eta} ((\alpha_f u_1^f + \alpha_s u_1^s)B) dx_3 - u_1^{\eta} B_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} + u_3^{\eta} B_{\eta} = 0 \\
 & \frac{\partial}{\partial t} (h + \eta) B_{moy} - B|_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-h}^{\eta} ((\alpha_f u_1^f + \alpha_s u_1^s)B) dx_3 - u_1^{\eta} B_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} + u_3^{\eta} B_{\eta} = 0 \\
 & B_{moy} \frac{\partial \eta}{\partial t} - B|_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-h}^{\eta} ((\alpha_f u_1^f + \alpha_s u_1^s)B) dx_3 - u_1^{\eta} B_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} + u_3^{\eta} B_{\eta} = 0
 \end{aligned} \tag{C.49}$$

En combinant cette dernière équation à l'équation (C.45), on obtient la condition de surface libre :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{B_{moy}} \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-h}^{\eta} ((\alpha_f u_1^f + \alpha_s u_1^s)B) dx_3 = 0 \tag{C.50}$$

C.3 Conditions aux limites

Les conditions de dirichlet ne sont pas affectées par ce changement de coordonnées. Nous allons donc traiter du passage en coordonnée σ de la condition cinématique de surface libre et de la loi logarithmique.

A la surface libre, η est indépendant de σ donc l'équation (C.45) n'est pas modifier dans le nouveau système de coordonnée :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t^*} + \frac{1}{B_{moy}} \frac{\partial}{\partial x^*} \int_0^1 ((\alpha_f u^f + \alpha_s u^s)B) d\sigma = 0 \tag{C.51}$$

Sur la première maille, la contrainte au fond est calculée à partir de la formule de Chézy (IV.18) :

$$\frac{\nu_t}{H} \frac{\partial u_f}{\partial \sigma} = \frac{g}{Ch^2} |U_m| U_m \tag{C.52}$$

Annexe D

Détails sur l'algorithme de résolution

D.1 Méthodes numériques

Le modèle résout les équations complètes de Navier-Stokes, *i.e.* sans l'hypothèse hydrostatique sur la pression, par une technique de projection de [Chorin \(1968\)](#) et [Teman \(1969\)](#). Cette méthode consiste à décomposer le système formé par les équations de conservation de la quantité de mouvement pour la phase fluide en deux sous-systèmes en introduisant les variables \vec{u}^* et p^* (Cf. [Barbry \(2000\)](#)).

D.1.1 Changement de coordonnées $(x, z) \rightarrow (x^*, \sigma)$

$$x^* = x \quad \sigma = \frac{z + h}{\eta + h} \quad t^* = t$$

h désigne la profondeur, η l'élévation de la surface libre et nous introduisons la notation $H = h + \eta$ pour la hauteur d'eau (Cf. Fig. D.1).

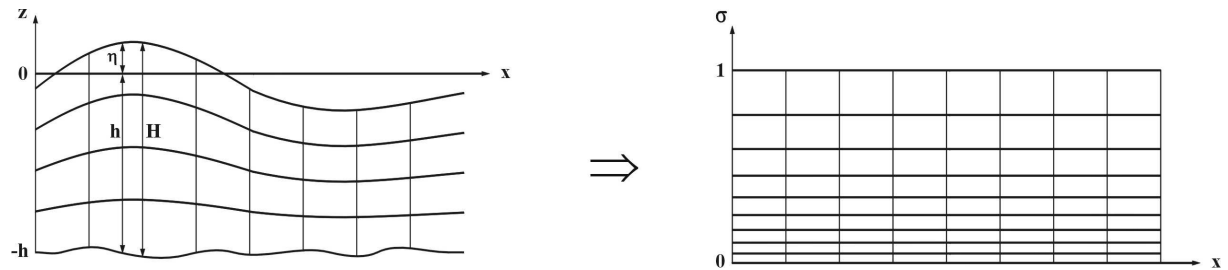


FIG. D.1 – Grilles de calcul dans les plans physique (Oxz) et de transformation $(Ox^*\sigma)$

La coordonnée verticale σ varie de 0 à 1. Les dérivées d'une variable arbitraire ϕ sont alors transformées de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x^*} + \frac{\omega_1}{H} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{1}{H} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t^*} - \frac{\sigma}{H} \frac{\partial \eta}{\partial t^*} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \omega_1 = \frac{1}{H} \left(\frac{\partial h}{\partial x^*} - \sigma \frac{\partial H}{\partial x^*} \right) \quad (\text{D.1})$$

D.1.2 Conditions aux limites

a) Condition au fond

Une condition d'adhérence est imposée sur la vitesse horizontale du mélange. Posons $\vec{u}_m = \alpha_f \vec{u}_f + \alpha_s \vec{u}_s$ la vitesse du mélange et u_m et w_m les composantes horizontale et verticale de cette vitesse. Cette condition s'écrit alors :

$$\begin{aligned} u_m|_{-h} &= 0 \\ w_m|_{-h} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

Le gradient verticale de la partie non-hydrostatique de la pression au fond est imposé nul.

b) Condition de surface libre

La condition dynamique impose la continuité de la pression à travers la surface libre :

$$P_\eta = P_{atm} \quad (\text{D.3})$$

où P_η désigne la pression à la surface libre et P_{atm} la pression atmosphérique.

La condition cinématique de surface libre traduit qu'aucun flux de matière ne traverse cette surface.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u_m|_\eta \frac{\partial \eta}{\partial x} = w_m|_\eta \quad (\text{D.4})$$

Où $u_m|_\eta = \alpha_f u_f|_\eta + \alpha_s u_s|_\eta$ et $w_m|_\eta = \alpha_f w_f|_\eta + \alpha_s w_s|_\eta$ désignent respectivement les composantes horizontale et verticale de la vitesse du mélange à la surface libre.

Etablissement de la condition de surface libre :

La condition de surface libre est obtenue en combinant l'équation de conservation de la masse globale du mélange (Eq. D.6) intégrée sur la verticale à la condition cinématique de surface libre (Eq. D.4). En faisant l'hypothèse que chaque phase est incompressible (*i.e.* : $\rho_k = \text{constante}$), l'équation de conservation de la masse pour chacune des phases s'écrit :

$$\frac{\partial \alpha_f}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\alpha_f \vec{u}_f) = 0 \quad (\text{D.5})$$

L'équation de conservation de la masse globale du mélange (Eq. D.6) est alors obtenue en sommant les équations de conservation de la masse des deux phases (Eq. D.5) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_f}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\alpha_f \vec{u}_f) + \frac{\partial \alpha_s}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\alpha_s \vec{u}_s) &= 0 \\ \frac{\partial \alpha_f + \alpha_s}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\alpha_f \vec{u}_f + \alpha_s \vec{u}_s) &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_m &= 0 \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

On retrouve ainsi la forme de l'équation classique de continuité pour le fluide seul. L'intégration de cette équation (Eq. D.6) sur la verticale s'écrit :

$$\begin{aligned} \int_{-h}^{\eta} \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_m dz &= 0 \\ \int_{-h}^{\eta} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x} + \frac{\partial w_m}{\partial z} \right) dz &= 0 \\ \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial u_m}{\partial x} dz + [w_m]_{-h}^{\eta} &= 0 \\ \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial u_m}{\partial x} dz + w_m|_{\eta} - \underbrace{w_m|_{-h}}_{=0} &= 0 \\ \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial u_m}{\partial x} dz + w_m|_{\eta} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

Règle de Leibniz :

<p>Si \mathcal{D} est un opérateur différentiel et ϕ une fonction de classe C^1</p> <p>Alors $\int_{x_1}^{x_2} \mathcal{D}\phi dx = \mathcal{D} \int_{x_1}^{x_2} \phi dx + \phi(x_1)\mathcal{D}x_1 - \phi(x_2)\mathcal{D}x_2$</p>
--

En appliquant la règle de Leibniz au premier terme du membre de gauche :

$$\begin{aligned}
 \int_h^\eta \frac{\partial u_m}{\partial x} dz &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{-h}^\eta u_m dz \right) + \underbrace{u_m|_{-h}}_{=0} \frac{\partial(-h)}{\partial x} - u_m|_\eta \frac{\partial \eta}{\partial x} \\
 \int_h^\eta \frac{\partial u_m}{\partial x} dz &= \frac{\partial}{\partial x} \underbrace{\left(\int_{-h}^\eta u_m dz \right)}_{=Q_m} - u_m|_\eta \frac{\partial \eta}{\partial x} \\
 \int_h^\eta \frac{\partial u_m}{\partial x} dz &= \frac{\partial Q_m}{\partial x} - u_m|_\eta \frac{\partial \eta}{\partial x}
 \end{aligned} \tag{D.8}$$

Où Q_m représente le débit horizontale du mélange. En introduisant (Eq. D.8) dans (Eq. D.7) on obtient l'équation simplifiée :

$$w_m|_\eta = u_m|_\eta \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial Q_m}{\partial x} \tag{D.9}$$

En soustrayant la condition cinématique de surface libre (Eq. D.4), on aboutit à la condition de surface libre suivante :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial Q_m}{\partial x} = 0 \tag{D.10}$$

Les conditions de surface libre (Eq. D.3) et (Eq. D.4) reste inchangées par le passage en coordonnées sigma puisque η est indépendant de σ .

D.1.3 Algorithme de projection

Dans une première étape \vec{u}^* est obtenu par résolution de l'équation de conservation de la quantité de mouvement à partir du champ de pression p^* , connue à l'itération précédente (Eq. D.11.a). En combinant l'équation de conservation de la masse à l'instant $n+1$ (Eq. D.11.b) et l'équation de correction de vitesse (Eq. D.11.c), une équation de Poisson pour la pression liant p_f^{n+1} à \vec{u}^* est résolue (Eq. D.11.d). Enfin, le champ de vitesse à l'instant $n+1$ est obtenue par résolution de l'équation de correction de vitesse à partir du champ de pression p^{n+1} (Eq. D.11.c).

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\vec{u}^* - \vec{u}^n}{\Delta t} + (\vec{u}^n \cdot \nabla) \vec{u}^* = -\frac{1}{\rho} \nabla p^* + \nabla \bar{\tau} & (a) \\ \nabla \vec{u}^{n+1} = 0 & (b) \\ \frac{\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^*}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \nabla (p^{n+1} - p^*) & (c) \\ \Delta (p^{n+1} - p^*) = \frac{\rho}{\Delta t} \nabla \cdot \vec{u}^* & (d) \end{array} \right. \quad (D.11)$$

$\bar{\tau}$ représente les termes de contrainte visqueuse et turbulente (Contrainte de Reynolds).

Remarque :

Le système d'équation (Eq. D.11) est ici présenté sous forme vectorielle pour l'écoulement d'un fluide incompressible seul. L'adaptation au cas d'un écoulement diphasique ne pose pas de difficulté majeure.

D.1.4 Discrétisation temporelle et spatiale

L'avance temporelle est réalisée par un schéma d'Euler (premier ordre) et la diffusion est discrétisée par un schéma centré. Pour l'advection, un schéma UPWIND premier ordre est utilisé sur l'horizontale et quatre schémas sont codés sur la verticale : le schéma UPWIND premier ordre, le schéma centré, le schéma hybride ([Patankar, 1980](#)) et le schéma Power Law ([Patankar, 1980](#)).

Les équations de conservation et de transport sont discrétisées en utilisant un schéma implicite sur la verticale et explicite sur l'horizontale. Le système obtenu est tridiagonal et peut s'écrire formellement sous la forme

$$A_N \phi_N + A_P \phi_P + A_S \phi_S = S \quad (D.12)$$

L'algorithme à double balayage ([Thomas, 1995](#)) est utilisé pour résoudre ce système.

La résolution de l'équation de Poisson sur la pression (Eq. D.11.d) est réalisée, soit par une méthode de Gauss Seidel, soit par une méthode GMRES ([Lucquin and Pironneau, 1996](#)). Cette dernière est particulièrement efficace lorsque le système n'est pas à dominante diagonale mais le temps de CPU utilisé est très nettement supérieur.

Afin d'éviter les oscillations numériques qui risquent de se produire lors de l'utilisation d'une technique de projection ([Guillou, 1996](#); [Guillou and Nguyen, 1999](#)), on utilise un positionnement décalé entrelacé ([Harlow and Welch, 1965](#)) des inconnues sur la grille de calcul (figure D.2). Le positionnement est de type "node center", les inconnues scalaires (la pression, les viscosités, les fractions volumiques, etc ...) sont placées aux noeuds du maillage et les inconnues de vitesses sont décalées d'un demi pas d'espace. Ainsi l'inconnue de vitesse horizontale u est décalée d'un demi pas d'espace horizontal vers les x croissants

et l'inconnue de vitesse verticale w est décalée d'un demi pas d'espace vertical vers les σ croissants.

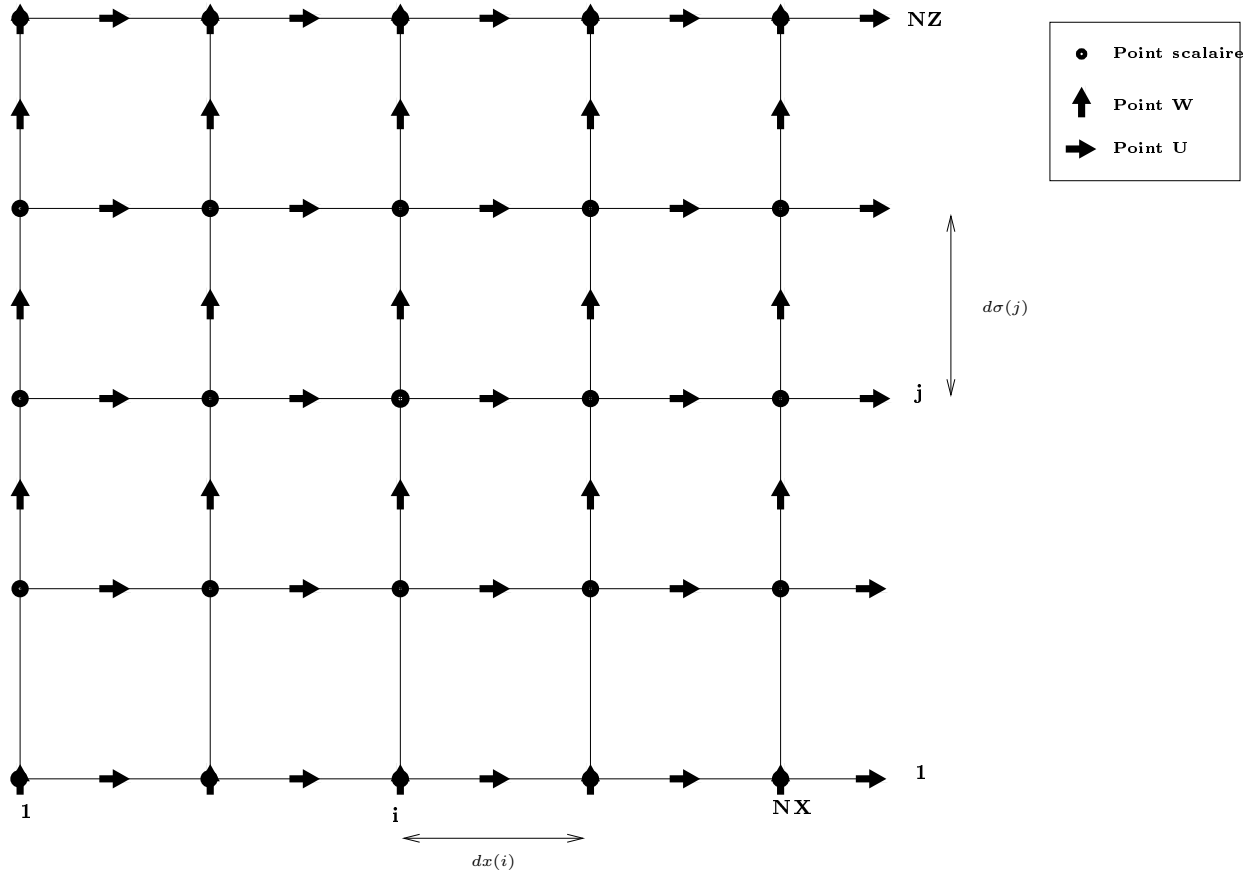


FIG. D.2 – Positionnement des points de calcul de la pression et de la vitesse

Notations :

- i est l'indice d'espace sur l'axe x , $i \in [1, NX]$;
- j est l'indice d'espace sur l'axe σ , $j \in [1, NZ]$;
- $dx(i)$ est le pas d'espace horizontal : $dx(i) = x(i+1) - x(i)$;
- $d\sigma(j)$ est le pas d'espace vertical : $d\sigma(j) = \sigma(j+1) - \sigma(j)$.

D.1.5 Techniques de résolution

Pour que la conservation de la masse soit vérifiée il a été nécessaire de résoudre l'équation de conservation de la masse par une technique de volumes finis en écrivant cette équation sous forme conservative. Les équations de transports pour les grandeurs turbulentes sont également résolues par une technique des volumes finis. Les équations de conservation de la quantité de mouvement et l'équation de Poisson sur la pression sont résolues par différences finies.

D.2 Organigramme du code

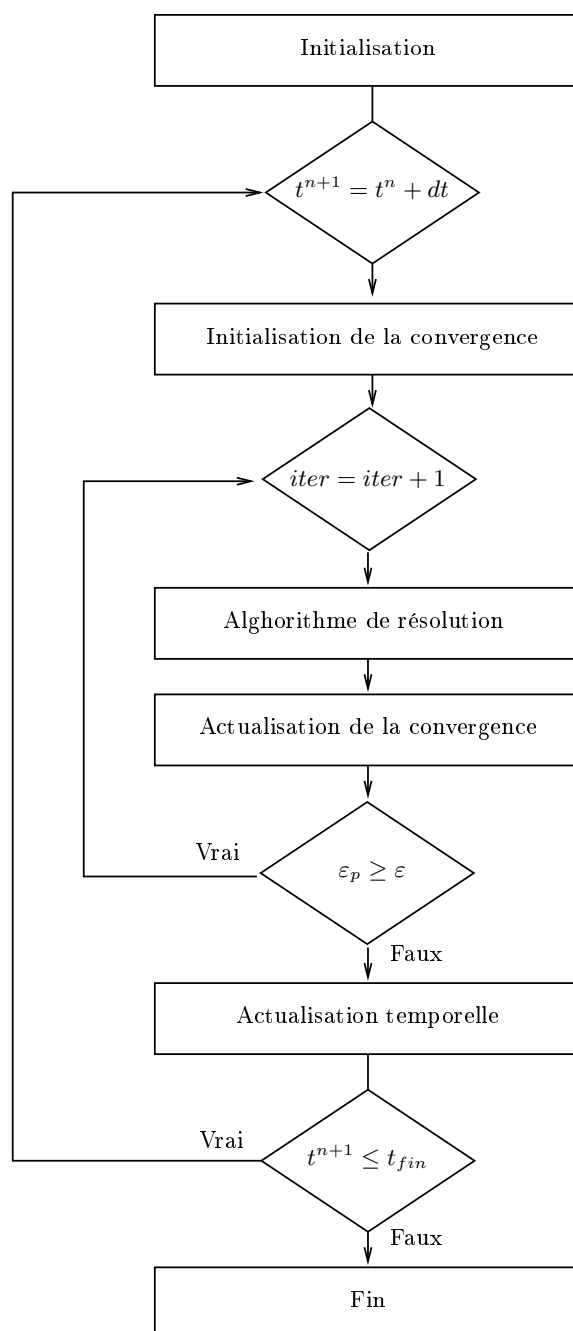


FIG. D.3 – Organigramme du code de calcul

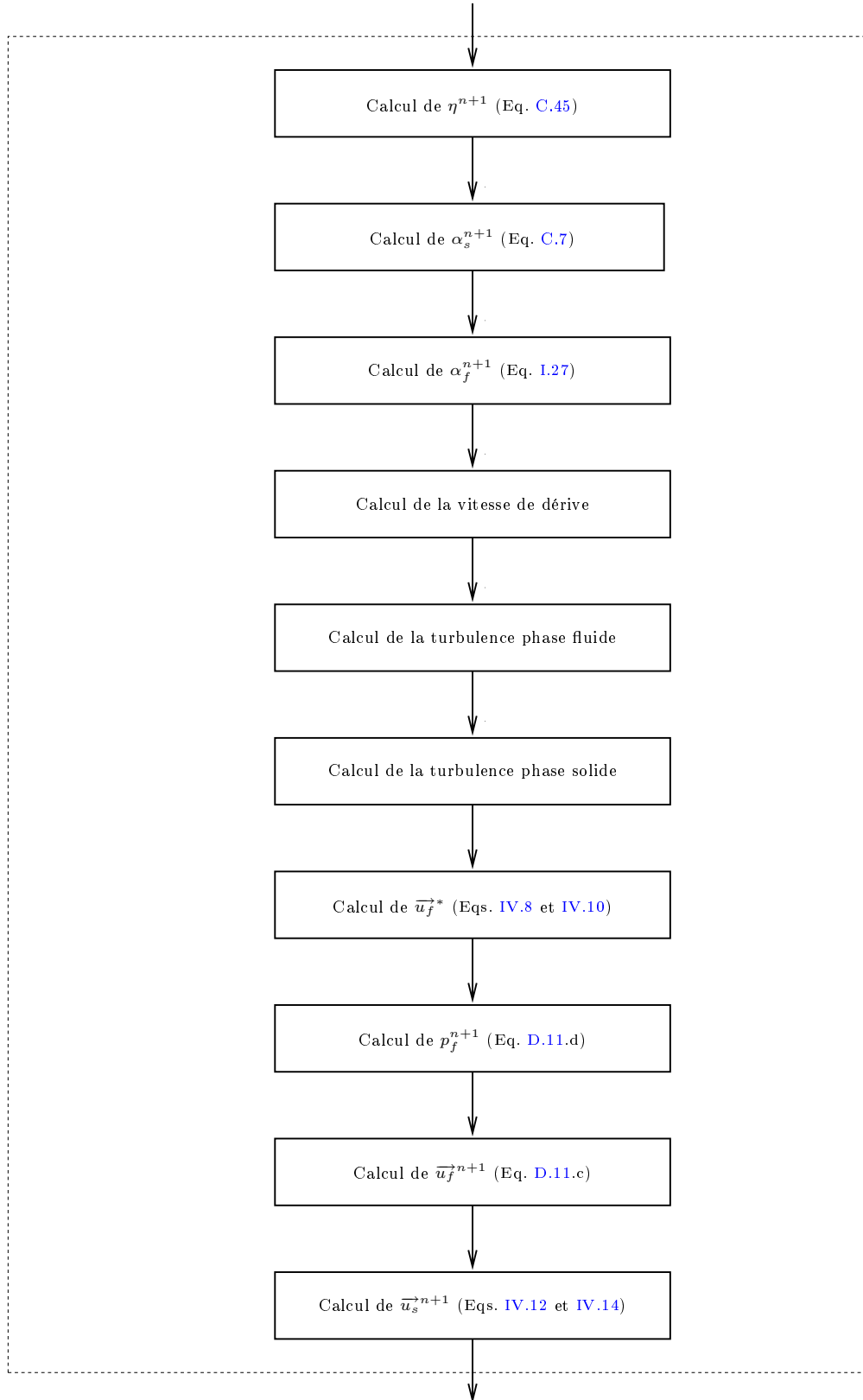


FIG. D.4 – Organigramme de l'algorithme de résolution

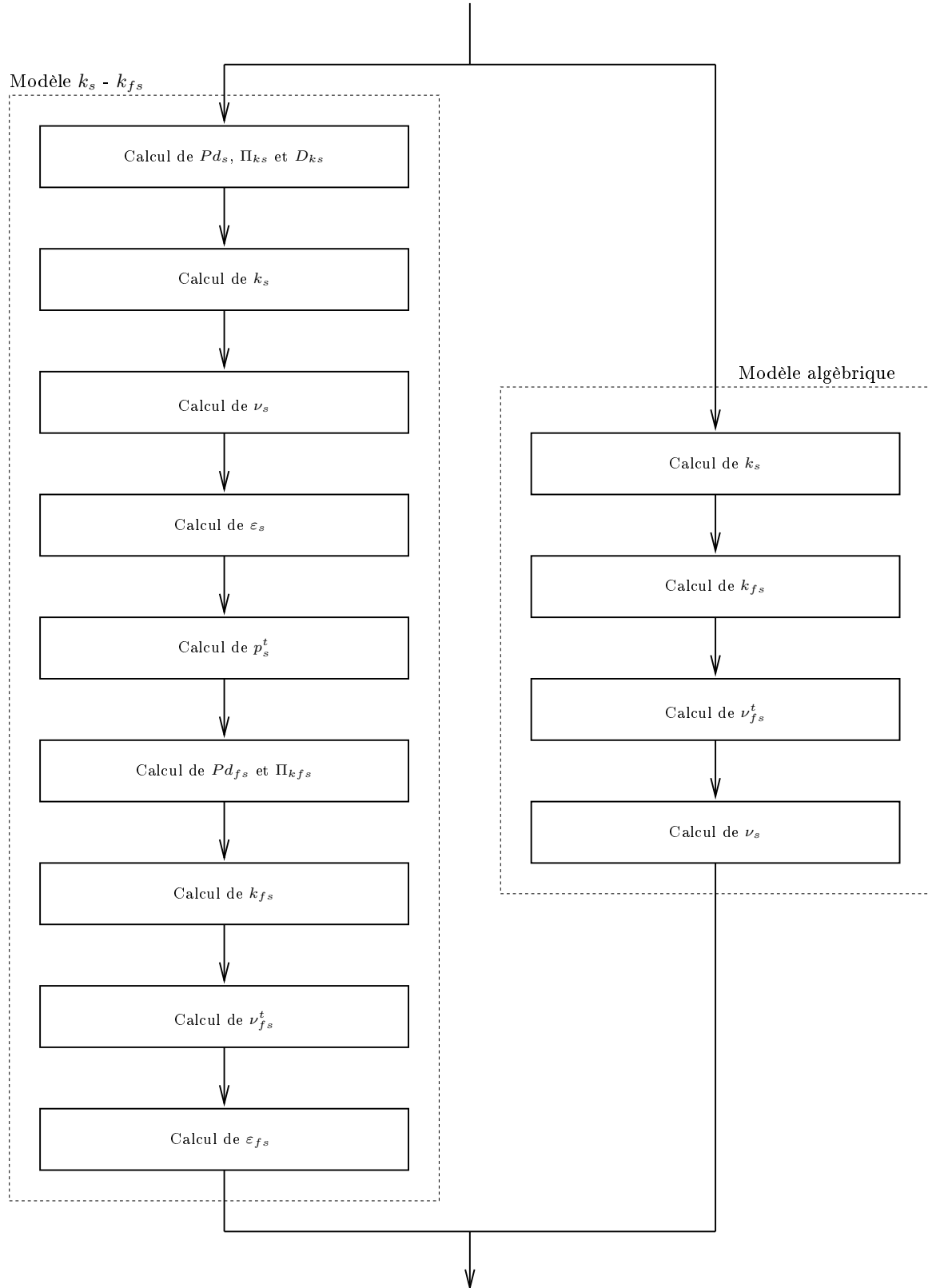


FIG. D.5 – Organigramme du modèle de turbulence pour la phase solide

RESUME :

Cette thèse constitue une contribution à la modélisation numérique diphasique du transport sédimentaire en milieux côtiers et estuariens. L'approche diphasique diffère de l'approche dite classique en résolvant des équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de transport pour l'énergie cinétique turbulente séparément pour chaque phase. Les interactions entre le fluide et les particules sont alors représentées par des termes de transfert entre les deux phases. Le travail présenté dans cette thèse fait suite aux travaux de Barbry et porte essentiellement sur la modélisation de la turbulence dans les écoulements diphasiques fluide particule.

En terme de résultats, nous montrons que l'approche développée est capable de reproduire quantitativement les principaux processus mis en jeu dans le transport sédimentaire de particules non cohésives : la sédimentation et la dispersion turbulente des particules en milieu dilué. Le modèle développé confirme l'existence d'une différence de vitesse horizontale entre les particules et l'eau. Il simule les effets de dispersion des particules par le mouvement turbulent du fluide et l'atténuation de l'énergie cinétique turbulente du fluide due à la présence des particules. Une autre originalité de ce travail est de proposer un modèle diphasique à surface libre, bidimensionnel vertical, pour la simulation du transport sédimentaire. Nous avons identifié des lacunes entre les théories et les expériences notamment pour la simulation de la turbulence en écoulement dense. Nous proposons des solutions pour améliorer la simulation du comportement de matériaux cohésifs. Une tentative de simulation hydrosédimentaire sur l'estuaire de la Seine est présentée. Le phénomène de bouchon vaseux est qualitativement reproduit par le modèle sans qu'aucune loi d'érosion ou de dépôt ne soit imposée.

ENGLISH TITLE :

Contribution to two-phase flow modeling for sediment transport in estuarine and coastal zones.

ABSTRACT :

This thesis represents a contribution to physical and numerical modelling for sediment transport in estuarine and coastal zones. The developed two-phase flow approach differs from the classical one by resolving the mass and momentum equations and the transport equation for turbulent kinetic energy, separately for each phase. Transfer terms of momentum and turbulent kinetic energy between phase takes into account fluid-particle interactions. The work presented in this thesis follows the one of Barbry (2000) and mainly involves turbulence modelling in particulate two-phase flows.

Concerning the results, we show that the developed approach can reproduce quantitatively the mains processes involved in sediment transport of non-cohesive particles : sedimentation and dispersion effects of particles by the turbulent fluid motion in dilute suspension. Especially, the proposed model confirms the existence of a horizontal velocity lag between the fluid and the particles. It simulates the turbulent dispersion effect of particles and the damping of fluid turbulence due to the particle's presence. Another originality of this work is to present a turbulent two-phase free-surface flow model, 2D vertical, for sediment transport simulation. Moreover, we identify the gaps between theories and experiments on dense, turbulent two-phase flow. We propose solutions for the simulation of cohesive material behaviour. An attempt to numerical simulation of turbidity maximums in the Seine estuary is presented. The model has qualitatively reproduced the turbidity maximum without imposing any erosion or deposition laws.

MOTS-CLES : Ecoulement diphasique ; Sédiment (Géologie) –transport ; Turbulence ; Modèles mathématiques ; Simulation par ordinateur ; Littoral ; Estuaires

KEYWORDS : Two-phase flow ; Sediment transport ; Turbulence ; Mathematical models ; Computer simulation ; Coasts ; Estuaries

DISCIPLINE : Mécanique des milieux fluides

Laboratoire de Morphodynamique Continentale et Côtière (M2C)
2-4 rue des tilleuls, Université de Caen (Campus 1), 14000 Caen cedex, FRANCE